Mathématiques appliquées à l'électrotechnique

Ces notes de cours sont tant qu'à présent en cours d'élaboration.

Elles sont complétées par des pages web à l'adresse suivante : http://courstechinfo.be/Math/Elec/

Ces pages web contiennent des exercices interactifs afin de permettre aux étudiants d'apprivoiser les sujets abordés plus facilement encore.

Je remercie d'avance les lecteurs qui voudront bien me faire part de leurs remarques éventuelles. Ainsi par exemple, bien que soucieux de ne laisser aucune faute, de calcul ou d'orthographe, je ne doute pas qu'il en reste. Quand vous en trouver, merci de me les signaler en adressant votre courrier à lucdemey@outlook.be

Luc De Mey

Année 2016-2017

Table des matières

1. Opérations arithmétiques 1-1
Vocabulaire des opérations 1-2
L'addition 1-3
Définition 1-3
Propriétés de l'addition 1-3
Somme algébrique 1-3
Somme de grandeurs 1-3
Addition écrite 1-4
Exercices 1-4
La soustraction 1-7
Définition 1-7
Propriété de la soustraction 1-7
Soustraction écrite 1-8
Quelques trucs pour soustraire mentalement 1-8
Exercices 1-8
La multiplication 1-10
1. Définition 1-10
Propriétés de la multiplication 1-11
Multiplication écrite 1-11
Calcul mental 1-11
Exercices 1-12
La division 1-14
1. Définition 1-14
Propriétés de la division 1-14
Divisions entières 1-15
Division écrite 1-15
Diviser mentalement 1-15
Exercices 1-16
2. Les unités de mesure 2-1
Objectif 2-1
Le système métrique 2-1
Les abaques de conversion 2-2
Unités de base et unités dérivées du SI 2-3
L'écriture des unités 2-4
Écriture en toutes lettres 2-4
Symboles des unités - Majuscules ou minuscules ? 2-4
Préfixes multiples et sous-multiples de 1000 2-4
Unités composées 2-5
3. Fractions 3-1
Définition 3-1
« Dénomination » 3-1
Numérateur 3-2
Nombres entiers et nombres décimaux 3-2
Comparons des fractions 3-2
Transformation des fractions 3-3
Simplification 3-3
Aditions et soustractions 3-4
Multiplication de fractions 3-5
Division de fractions 3-5
Exercices 3-6
4. Puissances de 10 4-1
Utilité des puissances de 10 4-1
Conventions d'écriture 4-1
Notation scientifique normalisée 4-2
Kilo, méga, giga … milli, micro, nano … 4-2
Notation ingénieur Puissances de 1000 4-3
En pratique 4-3
Calculs avec puissances de 10 4-4
5. Couplage de résistances en série 5-1
Définition 5-1
Répartition du courant et des tensions 5-1
Exercice 5-1
Exercices 5-2
Applications 5-2
Résistance additionnelle 5-2
Pont diviseur de tension 5-3
6. Couplage de résistances en parallèle 6-1
Description du montage 6-1
Résistance équivalente 6-1
Analogie hydraulique - Conductance 6-1
Cas particuliers 6-2
Exercices 6-2
7. Couplage de résistances – Circuits mixtes 7-1
Exercices 7-1

8. Lois de Pouillet et de Matthiessen 11-1
La résistivité 11-1
La longueur 11-1
La section 11-1
Influence de la température – Loi de Matthiessen 11-2
Exercices 11-3
9. Équation du premier degré 11-1
Objectifs 12-1
Qu'est-ce qu'une équation ? 12-1
Résolution des équations 12-1
Exercices 12-2
10. Coordonnées cartésiennes 8-1
11. Proportionnalités 9-1
Grandeurs directement proportionnelles 10-1
Coefficients de proportionnalité 10-1
Grandeurs inversement proportionnelles 10-2
Règle de trois 10-3
Méthode du passage à l'unité 10-3
Exercices 10-4
Représentation algébrique d'une proportion directe 10-5
Exercices 10-5
12. Pourcentages 9-1
Introduction 9-1
Qu'est-ce qu'un pourcentage ? 9-1
Exercices 9-2
Pourcents en plus ou en moins 9-2
On n'additionne pas des € et des % 9-2
Risques d'erreurs 9-3
Exercices 9-3
13. Éléments de trigonométrie 11-1
Les triangles 14-1
Classification des triangles 14-1
Droites particulières 14-1
Propriétés des angles d'un triangle 14-1
Le triangle rectangle 14-2
Théorème de Pythagore 14-2
Une corde en guise d'équerre 14-2
Exercices 14-3
Les fonctions trigonométriques 14-4
Objectif 14-4
Les angles du triangle rectangle 14-4
Dimensions d'un triangle rectangle 14-4
SOH CAH TOA 14-4
Trois formules à retenir 14-5
Connaissant un angle et un côté, calculer la longueur d'un autre côté 14-5
Exercices 14-6
Connaissant les longueurs de deux côtés, calculer la valeur d'un angle 14-7
Exercices 14-7
14. Disjoncteur magnéto-thermique 15-1
Surchage ..... **Erreur ! Signet non défini.**
Court_circuit ..... **Erreur ! Signet non défini.**
Le disjoncteur magnéto-thermique 15-1
L'élément thermique 15-2
L'élément magnétique 15-3
Courbes de déclenchement des disjoncteurs 15-3
15. Solutions des exercices 16-1

1. Opérations arithmétiques

Objectifs	1-1
Vocabulaire des opérations	1-2
L'addition	1-3
La soustraction	1-6
La multiplication	1-9
La division	1-13

Objectifs

Comprendre la signification des opérations fondamentales.

Connaître et savoir utiliser le vocabulaire propre à ces opérations.

Maîtriser le calcul mental pour des valeurs simples.

Savoir faire les opérations fondamentales par écrit.

Apprendre à faire ces calculs avec une calculatrice.

Nous avons tous appris dans notre enfance les "quatre opérations". Toujours vues dans le même ordre : l'addition, puis la soustraction, la multiplication et la division. L'apprentissage progressif de chacune de ces opérations s'appuie sur une bonne compréhension de la précédente. On demande aux élèves de l'enseignement fondamental de parvenir à faire mentalement des calculs simples et, par écrit, des calculs avec des nombres de plusieurs chiffres. L'étude des tables de multiplication fut pour ce faire un passage laborieux qui a demandé aux jeunes élèves que vous étiez des heures de travail.

Il y a de fortes chances que par la suite vous ayez appris à élever un nombre au carré puis au cube. Vous avez découvert les exposants et plus tard les racines. D'autres opérations pour lesquelles les calculatrices deviennent parfois indispensables. Vous deviniez à ce moment qu'outre les opérations arithmétiques de base, il devait en exister bien d'autres encore et que vous n'utiliserez probablement jamais toutes les touches des calculatrices scientifiques.

C'est vers l'âge de 12 ans que l'on apprend à faire des calculs non plus avec des nombres mais avec des lettres censées représenter des variables. Les préadolescents de cet âge sont devenus capables de penser aux opérations arithmétiques de manière abstraite sans les appliquer directement à des nombres précis. Ils sont à même de comprendre certaines propriétés de ces opérations telles que l'associativité, la commutativité, la distributivité etc. Toutes ces notions étant indispensables pour être capable un jour de résoudre des équations, étudier des fonctions et transformer des formules. Bref savoir utiliser le langage mathématique pour traiter des problèmes techniques, commerciaux ou scientifiques.

Ce premier chapitre se limite à revenir sur les notions fondamentales que sont les opérations arithmétiques. C'est un retour aux notions de départ, un rappel utile à ceux qui n'ont plus fait de calculs depuis longtemps et qui faute d'en avoir eu l'utilité, ont oublié tout cela.

Vocabulaire des opérations

Les opérations arithmétiques sont les opérations que l'on peut faire sur des nombres.

Les nombres sur lesquels vont porter les opérations sont appelés **opérandes**

L'opération proprement dite est représentée par un **signe opérateur** +, -, x, /, !, √ ou par une écriture particulière : mise en exposant, utilisation de nom de fonctions tels que *log* ou *mod*.

Le signe égal (=) précède la réponse.

Opération	*Ecriture de l'opération*	*Opérandes*	*Résultat*	
Addition	+	Termes	Somme	$S = T_1 + T_2$
Soustraction	-	Termes	Différence	$D = T_1 - T_2$
Multiplication	X ou . ou rien	Facteurs ou Multiplicande x multiplicateur	Produit	$P = M \times m$
Division Div. entière	: ou — ou /	Dividende / diviseur	Quotient Q. et reste	$Q : D / d$ $D = d \times Q + r$
Puissance	mise en exposant	base exposant	Puissance	$\mathscr{P} = b^x$
Racine	$\sqrt{\ }$	$\sqrt{\text{Radical}}$	Racine	$\sqrt[x]{\mathscr{P}} = b$

Chacun aura reconnu les quatre opérations de base : l'**addition**, la **soustraction**, la **multiplication** et la **division**.

La **division entière**, aussi appelée **division Euclidienne**, s'utilise quand le résultat ne peut être qu'un nombre entier. (Comment distribuer équitablement 11 caramels à 5 enfants ?) Il n'est pas rare que les mathématiciens ne s'intéressent qu'au reste de la division entière (les deux derniers chiffres des numéros de compte en banque sont le reste de la division de ce n° de compte par 97)

Les calculs de **puissances** et de **racines** sont à la portée des collégiens lorsque les exposants sont des nombres entiers. Cela se complique et devient beaucoup plus abstrait lorsque les exposants sont des nombres réels et donc pas nécessairement entiers ou positifs.

L'addition

Définition

L'addition numérique vise à exprimer par un seul nombre, appelé somme, la quantité que représente l'ensemble des nombres ajoutés.

L'addition de deux grandeurs physiques donne une grandeur physique de même nature qui résulte de la réunion des valeurs ajoutées.

Du point de vue numérique, l'addition est l'opération la plus élémentaire. Compter, c'est déjà additionner.

Le résultat de l'addition est appelé **somme** ou **total**

Les nombres à additionner sont appelés **termes** de l'addition.

Propriétés de l'addition

Commutativité

a + b = b + a

L'ordre des termes est sans importance.

Associativité

a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)

Les regroupements de certains termes sont possibles.

Zéro est un élément neutre pour l'addition

a + 0 = a

Ajouter zéro ne change rien.

Somme algébrique

Les nombres et les grandeurs peuvent avoir des valeurs négatives.
Ajouter une valeur négative revient à faire une soustraction.

Exemples : 18 + (-5) = 18 - 5 = 13 « Plus par moins = moins »

-5° +7° = 2° Si après un gel à -5°C, la température remonte de 7°, c'est qu'il fait 2°C

Somme de grandeurs

Puisque notre but est de faire des mathématiques appliquées, considérons que les valeurs à additionner puissent être autre chose que des nombres purs sans dimensions.

Sachons faire la distinction entre « nombres abstraits » et « grandeurs » :
3 < 50 (3 est inférieur à 50) c'est une comparaison entre deux nombres purs, abstraits, sans dimension.
Mais 3 km > 50 cm (3 km est supérieur à 50 cm) c'est la comparaison de deux grandeurs

L'addition est une opération qui s'effectue sur des grandeurs de même espèce.
La somme est une grandeur de même nature que les termes de l'addition.

Quand par exemple on additionne deux distances ont obtient une distance, et si on additionne deux nombres sans unité le résultat est lui aussi un nombre sans unité. Quand les grandeurs à additionner, bien que de même nature sont exprimées avec des unités différentes, il suffit de les convertir dans une même unité avant de procéder à l'addition.

Exemples :

1 pouce + 10 mm = 25,4 mm + 10 mm = 35,4 mm

2,5 litres + 25 cl = 250 cl + 25 cl = 275 cl ou 2,75 litres

13h50 + 30 min = 14 h 20

Addition écrite

Placer les nombres les uns au-dessus des autres en alignant les chiffres de même rang (unités, dizaines, centaines, ... ou dixièmes, centièmes etc.)

Commencer alors l'addition par la droite en marquant les reports au-dessus.

```
 1 1
 237
+164
 401
```

+4 = 11 ; on pose 1 et on reporte 1

1+3+6 = 10 ; on pose 0 et on reporte 1

1+2+1 = 4 ; on pose 4 ; la réponse est 401

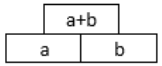
Exercices

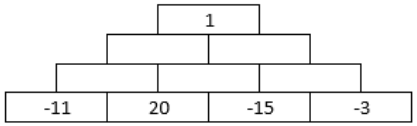
Calculer sans oublier de noter les unités choisies

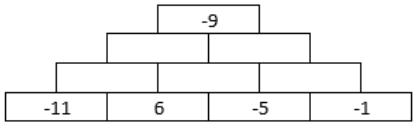
1 km + 250 m =	0,5 km + 80 m =
5 cm + 12 mm=	800 W + 2 kW =
2h40 + 50 min =	2,4 m + 70 cm =
200 W + 4 kW =	1,2 kg + 850 gr =
2,5 km + 1400 m =	8h30 + 50 min =

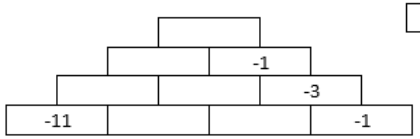
Sommes algébriques

Complétez de sorte que chaque case contienne la somme des deux cases sous elle.









Calculs écrits

```
   1235        1998        120
     46          75        777
+   169      +  823      + 123
```

Calculez par écrit :

117,62 + 90,88 =

0,492 + 0,0795 =

Complétez les opérations suivantes :

```
   .47.        ..4541        8.3
    7.1        70..70        937
+  8.35      +  869..      + .96
  12945       1121656       265.
```


Carrés magiques

Carré magique : Placez dans chacune des cases un chiffre différent de sorte que dans toutes les directions le total fasse 15

2		
	5	

Complétez le tableau suivant de sorte que tous les nombres de 1 à 25 y figurent une fois et que dans toutes les directions la somme soit de 65

11		7	20	3
	12	25	8	
17		13		9
				22
23	6	19		15

La soustraction

Définition

La soustraction est en quelque sorte l'opération inverse de l'addition.

Connaissant la somme de deux valeurs et l'une de celles-ci on cherche l'autre.

"Premier terme – Second terme = **Différence**"

Comme pour l'addition, la soustraction n'est possible que si on soustrait des grandeurs de même nature. Impossible donc de calculer 2m - 4s !

Propriété de la soustraction

Contrairement à l'addition, la soustraction n'est ni associative ni commutative

Pas de commutativité

a - b <> b - a

Pas d'associativité

a - b - c = (a - b) - c <> a - (b - c)

Soustraire zéro ne change rien

Zéro est un élément neutre s'il est le second terme de la soustraction

a - 0 = a

Soustractions et parenthèses

Les parenthèses ne peuvent être mises ou retirées sans précaution !

Quand un calcul comporte des parenthèses, il y a deux manières de s'en débarrasser :

- Soit on commence par calculer les valeurs entre parenthèses

  60 + (15 - 5) = 60 + 10 = 70

  81 – (27 -9) = 81 – 18 = 63

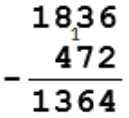
- Soit on supprime les parenthèses, sans oublier lorsqu'elles sont précédées du signe moins de changer tous les signes des termes inclus entre ces parenthèses

  60 + (15 - 5) = 60 + 15 – 5 = 75 – 5 = 70

  81 – (27 -9) = 81 – 27 + 9 = 54 + 9 = 63

> Si les parenthèses sont précédées du signe plus (+)
> → Rien ne change
> Si les parenthèses sont précédées du signe moins (-)
> → Changer tous les signes des termes inclus entre ces parenthèses

Soustraction écrite



Aligner les chiffres de même rang (unité, dizaines, etc.)
Commencer par la droite
6 – 2 = 4 → on pose 4 pour les unités
3 – 7 … Impossible ! → On fait 13 – 7 et on marque une retenue de 1
13 – 7 = 6 ; poser 6 dans la colonne des dizaines
On tient compte de la retenue => 8 – 1 – 4 = 3 centaines
1 – rien => On abaisse 1 ; la réponse est 1364

Quelques trucs pour soustraire mentalement

Soustraction de nombres légèrement inférieurs à un nombre rond

Exemples

75 – 39 = 75 – 40 + 1 = 35 + 1 = 36

1244 - 199 = 1244 - 200 + 1 = 1044 + 1 = 1045

1485 – 998 = 1485 – 1000 + 2 = 485 + 2 = 487

Comme la boulangère, sachez rendre la différence sans soustraire

En voulant aller vite, il arrive à tout le monde d'oublier une retenue lors des passages aux dizaines ou de faire une erreur de ce genre.

Si quand votre boulangère vous demande 18,75 €, vous lui tendez un billet de 50 €, il est fort probable qu'elle vous rende la monnaie en comptant à partir de 18,75€ :

25 cents pour faire 19 €,

1 € (pour faire 20 €)

et 30 € pour aboutir au total de 50 €.

Ni vous, ni elle, n'avez fait de soustraction pourtant elle vous a rendu la différence (31,25).

La méthode a le mérite d'être simple et le risque d'erreur est moindre.

Exercices

Calculer sans oublier de noter les unités choisies

1 m – 75 mm =

1 m³ - 100 litres =

120 € -150 € =

12h30 - 55 min =

1,2 ha - 92 a =

Calculer mentalement

125 - 35 =	100 - 63 =	140 - 19 =
2570 - 170 =	121 - 41 =	790 - 18 =
95 - 42 =	121 - 42 =	1024 - 800 =
338 - 114 =	1367 - 467 =	2048 - 50 =
2048 - 248 =	2895 - 995 =	4728 - 499 =

Calculs écrits

```
 1235      1998      120
- 169     - 99     -777
```

Trouvez les chiffres manquants dans les soustractions suivantes

```
 8.7.      73.27     70..
-.4.9    - 87.3    -..34
 1834      ..09.     5853
```


La multiplication

1. Définition

P = M * m

Produit = Multiplicande x multiplicateur

La multiplication consiste à ajouter un certain nombre de fois une valeur à elle-même.

Symboles de l'opérateur :

Le signe x en calcul écrit devient * ou un point pour ne pas être confondu avec la lettre x.

En algèbre, on omet même souvent le signe de multiplication. "2*a" s'écrit aussi "2.a" ou tout simplement "2a"

Contrairement à l'addition et à la soustraction, les facteurs de la multiplication ne doivent pas nécessairement être de même nature.

Si le multiplicateur est un nombre sans unité, le résultat reste de même nature que le multiplicande.

Exemple :

Ces piles rectangulaires de 9 V sont constituées de 6 éléments de 1,5 V.

La tension fournie est de 6 * 1,5 V = 9 V

Lorsque ni le multiplicateur ni le multiplicande ne sont des nombres abstraits (sans dimension), le produit est de nature différente de chacun des deux facteurs.

Exemples :

10 cm * 5 cm = 50 cm² → Une longueur fois une autre longueur = une surface.

6 V * 0,2 A = 1,2 W → Une tension multipliée par une intensité donne une puissance.

120 km/h * 2 h = 240 km → Un vitesse multipliée par un temps donne une distance.

Une ampoule de 11 Watts
consomme en 8 h
une énergie de 11 W * 8 h = 88 Wh

*Puissance [W] * Durée[h] = Energie [Wh]*

Propriétés de la multiplication

Comme l'addition, la multiplication est associative et commutative

Commutativité	a * b = b * a
Associativité	a * b * c = (a * b) * c = a * (b * c)
Distributivité	(a + b) . c = ac + bc → "distribution"
	ac + bc = (a + b) . c → "mise en évidence"
1 est un élément neutre	a * 1 = a "rien ne change"
0 est absorbant	0 annule toujours le résultat = a * 0 = 0

Multiplication écrite

Multiplier le premier nombre par chacun des chiffres du second en commençant par la droite.

Prendre soin de superposer les produits partiels en décalant chacun d'un rang vers la gauche.

Calculer le produit final en faisant la somme des produits partiels.

```
      3 0,4 2
  ×     1 9,5
  -----------
    1 5 2 1 0    ⟶  3042 * 5 = 15210 unités
  2 7 3 7 8      ⟶  3042 * 9 = 27378 dizaines
  3 0 4 2        ⟶  3042 * 1 = 3042 centaines
  -----------
  5 9 3,1 9 0    ⟵  Produit total
```

Si les nombres à multiplier ne sont pas des nombres entiers : commencer le calcul sans tenir compte des virgules, puis on place la virgule dans le résultat final de sorte qu'il contienne autant de chiffres décimaux qu'il y en a dans les deux facteurs.

Calcul mental

Multiplication par 5 → * 10 / 2
48 * 5 = 48 * 10 / 2 = 480 / 2 = 240
Multiplication par 25 → * 100 / 4
48 * 25 = 48 * 100 / 4 = 4800 / 4 = 1200
Multiplication par 125 → * 1000 / 8
48 * 125 = 48000 / 8 = 6000
Multiplication par 9 → * (10 -1)
48 * 9 = 48 * (10-1) = 480 – 48 = 432
Multiplication par 99 → * (100 – 1)
48 * 99 = 48 * (100 – 1) = 4800 - 48 = 4752
Multiplication par 11 → * (10 + 1)
48 * 11 = 480+48 = 528

Exercices

Vérifier la propriété d'associativité avec le calcul suivant :

7 * 2 * (-3)

Calculer en précisant quelles sont les unités des réponses

1 m * 1 m =	12,5 m * 80 =
100 W * 5 h =	0,64 * 200 =
120 km/h * 8 h =	24 * 0,5 =
2000 kcal/j * 1 semaine =	36 * 0,25 =
16 m² * 50 cm =	(6 L / 100 km) * 400 km =

Comment fait-on pour multiplier par 10 ?

- si le nombre à multiplier est entier : . . . .
- si c'est un nombre avec une virgule : . . . .

Calculs écrits

```
   1.235       1998       560
 ×   169    ×    99    ×   77
 -------    -------    -----
```

Calculer (mentalement si possible)

160 * 9 =

1200 * 0,25 =

80 * 0,75 =

(100 + 5) * 2 =

100 + 5 * 2 =

11 + 17 * 13 -3 =

(11 + 17) * (13 – 3) =

8 * 4 + 3 * 2 =

8 * (4 + 3) * 2 =

Déterminer les chiffres manquants dans les opérations suivantes

```
   834.
×   ..7
  ----------
   ....5
  16690
 .....
  ----------
 3563315
```

```
    245
×   ...
  ----------
   ..05
  ...5
 1470
  ----------
 ..63..
```

Calculez en démontrant votre raisonnement

La somme de 3 nombres est 26
Que vaudra-t-elle si on multiplie chacun de ces nombres par 3 ?

Le produit de 2 nombres est 100.
Que serait ce produit si chacun des deux nombres était deux fois plus petit ?

A la vitesse de l'éclair

En faisant comme si la lumière se déplaçait instantanément (à une vitesse infinie) et sachant que le son ne se propage que à 340 m/s, à quelle distance est tombée la foudre si le coup de tonnerre a été entendu sept secondes après avoir vu l'éclair ?

La division

1. Définition

La division est l'opération inverse de la multiplication. (Tout comme la soustraction était l'inverse de l'addition)

On utilise la division dès qu'il s'agit de partage ou encore pour déduire certaines grandeurs à partir d'autres grandeurs connues.

Exemples :

1 J'ai une tarte à partager entre 6 convives

Quelle part recevra chaque convive ? (Division exacte, le reste est nul)

2 J'ai 38 friandises à partager entre 7 enfants

Comment faire ce partage sans faire de jaloux ? (Division entière, il y a un reste)

3 J'ai parcouru 45 km en une demi-heure.

Quelle est ma vitesse moyenne ?

Ici la division conduit à une nouvelle grandeur **V** [km/h] **=** (**d** [km]) **/** (**t** [h])

$$\frac{\text{Dividende}}{\text{diviseur}} = \text{Quotient} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Dividende} = \text{Quotient} * \text{diviseur}$$

Signe de division ":" (deux points), ou la barre de fraction

Propriétés de la division

$$\frac{(a+b)}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \qquad \frac{a}{b} \neq \frac{b}{a} \qquad \frac{a/b}{c} \neq \frac{a}{b/c}$$

La division est **distributive** mais pas commutative ni associative

Remarque

Si la valeur absolue du diviseur est inférieure à 1, alors *Quotient > Dividende*

« Partager en moitiés, c'est faire deux fois plus de parts. »

En particulier, diviser par une fraction = multiplier par l'inverse de cette fraction

(Diviser par ½, c'est multiplier par 2)

Impossible de diviser par 0 !

Les calculatrices affichent alors une erreur de division par 0.

Les programmes d'ordinateur doivent s'assurer avant de faire une division que le diviseur n'est pas nul.

Divisions entières

En arithmétique et en informatique, il arrive souvent qu'on ne s'intéresse qu'aux divisions entières. Le quotient et le reste de la division sont des nombres entiers.

Diviseur = (Quotient * diviseur) + Reste

Exemple :

Soit à partager 38 friandises entre 7 enfants, il faut que les parts soient égales.

38 / 7 = 5 reste 3 => 38 = (5 * 7) + 3

Remarquez que le reste est forcément plus petit que le diviseur.

Division écrite

Exemple :

$\frac{42,72}{1,6}$ $\frac{427,2}{16}$

```
427,2 | 16
32    | 26,7
107   |
 96   |
 112  |
 112  |
   0  |
```

Puisque le diviseur fait 2 chiffres prendre les deux chiffres de gauche du diviseur et chercher à savoir combien de fois 16 vont dans 42.

On pose 2 car 16 * 2 = 32 < 42

Soustraire 32 de 42. On trouve 10 nécessairement inférieur à 16

Abaisser le chiffre suivant (7)

Chercher combien de fois le dividende 16 va dans 107 ?

Poser 6 car 16 va 6 fois dans 107 (6*16=96)

Soustraire 96 de 107 -> 11

Mettre la virgule dans le quotient avant de baisser les décimales du dividende.

Continuer pour obtenir une division aussi précise que voulue

Diviser mentalement

Pour diviser par 5 :

Diviser par 10 et multiplier par 2 → * 5 = * 10 / 2

190 / 5 = (190 / 10) * 2 = 19 * 2 = 38

Diviser par 25 :

Diviser par 100 et multiplier par 4 → * 25 = * 100 / 4

300 / 25 = (300 / 100) * 4 = 3 * 4 = 12

Exercices

Calculer par écrit

2014 / 53 17010 / 162 125 / 15 369 / 820

Calculer les divisions entières pour déterminer le quotient et le reste

Complétez le tableau avec dans la dernière colonne, la réponse sous la forme `Dividende = diviseur * quotient + reste`

Dividende **D**	Diviseur **d**	Quotient **Q**	Reste **R**	`D = d * Q + r`
286	10			
189	13			
1560	65			
1390	18			

2. Les unités de mesure

Objectif

Les futurs techniciens auxquels s'adresse ce cours doivent avant tout voir les mathématiques comme des outils utiles dans la vie professionnelle ou pour la suite de leur formation. C'est dans cet esprit que je me plais à faire référence ici à une citation de René Descartes lui-même :

"en réalité, il n'est rien de plus vain que de s'occuper de nombres nus et de figures imaginaires en sorte de paraître vouloir s'arrêter à la connaissance de telles niaiseries."[1]

La mesure des grandeurs est le point de départ de toutes démarches mathématiques. Dans ce cours de mathématiques appliquées, nous ferons autant que possible des calculs avec des grandeurs réelles et des problèmes concrets. Dans ce contexte, **donner des réponses chiffrées sans préciser les unités n'a aucun sens**. Dire par exemple qu'une surface fait «20» ne signifie rien si on ne précise pas que ce sont des mm², des cm², ... ou des km² ?

Les mathématiciens « purs » se sont affranchis de la question des grandeurs. Ils se complaisent dans l'abstraction et n'ont pas besoin de mesures pour parler de nombres. Certains désapprouveraient la recommandation que je fais cependant pour ce cours : **Écrivez les unités dans vos calculs**. Cela permet de vérifier l'homogénéité des formules : les unités font parties des calculs.

Ainsi une grandeur « quotient » comme dans le cas de la vitesse en km/h s'obtient en divisant une distance en kilomètres par une durée en heure. L'écriture des unités dans les calculs attire l'attention sur la nécessité éventuelle d'effectuer des changements d'unités pour avoir un résultat cohérent.

De même il existe des grandeurs « produit » comme c'est le cas pour l'énergie comptée en kWh. Le seul fait de connaître les unités utilisées permet parfois de deviner la formule à utiliser ou en tout cas de vérifier sa vraisemblance.

Le système métrique

Comme son nom l'indique le système métrique a pour base le mètre, dont les multiples et sous-multiples vous sont familiers.

Multiples et sous-multiples du mètre

Longueur	kilomètre	hectomètre	décamètre	mètre	décimètre	centimètre	millimètre
	km	**hm**	**dam**	**m**	**dm**	**cm**	**mm**

On se rappelle que pour former le nom d'un multiple ou d'un sous-multiple du mètre, on fait précéder son nom par un préfixe.

- Les préfixes multiplicateurs sont déca (**da**) , hecto (**h**) et kilo (**k**) quand c'est 10, 100 ou 1000 fois plus gros.
- Les préfixes diviseurs sont déci (**d**), centi (**c**) et milli (**mm**) quand c'est 10, 100, 1000 fois plus petit.

Les mêmes préfixes sont repris pour mesurer les capacités volumétriques (multiples et sous-multiples du litre) ainsi que pour les masses.

[1] Tiré de son ouvrage "Règles utiles et claires pour la direction de l'esprit et la recherche de la vérité"

Multiples et sous-multiples du litre et du gramme

Capacité	kilolitre	hectolitre	décalitre	litre	décilitre	centilitre	millilitre
	kl	**hl**	**dal**	**l**	**dl**	**cl**	**ml**
Masse	kilogramme	hectogramme	décagramme	gramme	décigramme	centigramme	milligramme
	kg	**hg**	**dag**	**g**	**dg**	**cg**	**mg**

Remarque :

Les mesures du temps et des angles font cependant exception à cette règle de n'utiliser que des multiples et sous-multiples strictement décimaux (60° 30' 20" ou 10h 25min 15s).

Les abaques de conversion

L'habitude fait que nous parvenons sans difficultés à convertir les cm en mm, et inversement.
De même pour la transition entre les kilomètres et les mètres.
D'autres conversions de longueurs moins courantes se posent parfois. Pour ne pas vous tromper, n'hésitez à recourir aux abaques que vous ont enseignés vos instituteurs de l'école primaire :

Abaque de conversion des unités de longueurs

	km	**hm**	**dam**	**m**	**dm**	**cm**	**mm**	
1 km = … mm ?	1	0	0	0	0	0	0	= 1 000 000 m
4,5 dm = … m ?				0	4	5		= 0,45 m
0,12 km = … m ?	0	1	2	0				= 120 m
0,8 m = … cm ?				0	8	0		= 80 cm

On passe d'une unité à l'unité voisine en multipliant ou en divisant par 10

Quand l'unité est 10 fois plus $\left\{\begin{matrix} petite \\ grande \end{matrix}\right.$ le nombre est inversement 10 fois plus $\left\{\begin{matrix} grand \\ petit \end{matrix}\right.$

Abaque de conversion des unités de surface

km²		**hm²**		**dam²**		**m²**		**dm²**		**cm²**		**mm²**	
		ha		**a**		**ca**							
							1	0	0				
					1	0	0						
			2	6	2	5	0						

Quand l'unité est 100 fois plus $\left\{\begin{matrix} petite \\ grande \end{matrix}\right.$ le nombre est inversement 100 fois plus $\left\{\begin{matrix} grand \\ petit \end{matrix}\right.$

On passe d'une unité à l'unité voisine en multipliant ou en divisant par 100. (1 m² = 100 dm²)
Chaque colonne de l'abaque de conversion des surfaces est subdivisée en deux. (1 dam² = 100 m²)

Les mesures de terrains se font en unités agraires. L'are correspond à 100 m². 1 ha = 100 a = 10.000 ca
Un notaire pourra par exemple annoncer la vente d'un terrain de 2 ha 62 a 50 ca soit 26.250 m².

N'hésitez pas à utiliser l'abaque dès que la conversion vous semble malaisée.

Abaque de conversion des unités de volume

Volume	km³			hm³			dam³			m³			dm³			cm³			mm³		
Capacité										kl	hl	dal	l	dl	cl	ml					
										1	0	0	0								

Quand l'unité est 1000 fois plus $\left\{\begin{matrix} petite \\ grande \end{matrix}\right\}$ le nombre est inversement 1000 fois plus $\left\{\begin{matrix} grand \\ petit \end{matrix}\right\}$

On passe d'une unité à l'unité voisine en multipliant ou en divisant par 1000. (1 m³ = 1000 dm³= 1000 l)
Chaque colonne de l'abaque de conversion des volumes est subdivisée en trois.

Unités de base et unités dérivées du SI

Le monde des techniciens abonde de grandeurs qui chacune a sa mesure et une ou plusieurs unités pour en exprimer la dimension.

Le système international (en abrégé SI) définit toutes les unités à partir de sept unités de base :

Le mètre **m**, unité de longueur

Le kilogramme **kg**, unité de masse

La seconde **s**, unité de temps

L'ampère **A**, unité de courant électrique

Le kelvin **K**, unité de température

La mole **mol**, unité de quantité de matière

La candela **cd**, unité d'intensité lumineuse

Toutes les autres unités sont dérivées de ces 7 unités de base. Elles s'obtiennent en les multipliant ou en les divisant les unes par les autres. C'est ce font les formules de la physique.

La vitesse par exemple s'exprime en mètres par seconde [m/s] c'est le résultat de la division d'une distance mesurée en mètres [m] par le temps qu'il a fallu pour la parcourir en secondes [s].

Mais on aurait tout autant pu l'écrire en kilomètres par heure [km/h] quand elle est le résultat de la division d'une distance exprimée en kilomètres [km] par le temps mesuré en heures [h].

Certaines grandeurs bien que dérivées des unités de base auront un nom particulier.
Ainsi une quantité d'électricité est donnée en ampère heure [Ah] si le temps est compté en heures.

$1\ A \cdot 1\ h = 1\ Ah$

Mais on exprime aussi la quantité d'électricité en coulombs [C] (produit de l'intensité en A par le temps en secondes). $1\ C = 1\ A \cdot 1\ s.$.

La connaissance de toutes ces formules ne fait pas partie du programme de ce cours. Elles ne servent ici qu'à démontrer que les multiplications et les divisions dont nous parlons dans ces chapitres concernent toutes les grandeurs physiques et pas seulement l'arithmétique et des nombres sans dimensions.

L'écriture des unités

Écriture en toutes lettres

Les noms des unités écrites en toutes lettres, s'écrivent toujours en minuscules, même si ces noms d'unités proviennent de noms propres : la pression en pascals, l'énergie en joules, les forces en newton etc.

Les noms des unités prennent la marque du pluriel : deux mètres, trois volts, cinq watts, six mètres cubes.

Symboles des unités - Majuscules ou minuscules ?

Les symboles des unités commencent par une majuscule quand elles proviennent d'un nom propre : **V** pour volt, **A** pour ampère, **Pa** pour pascal, **Hz** pour Hertz, **N** pour newton, ...

Les unités dont le nom n'est pas un nom propre s'écrivent toutes en minuscules : **m** pour mètre, **g** pour gramme, **s** pour seconde, **h** pour heure, etc.

Seul le litre fait exception. Le symbole **L** majuscule est permis afin d'éviter la confusion entre la lettre **l** minuscule et le chiffre 1.

Préfixes multiples et sous-multiples de 1000

Nous avions vu précédemment quels sont les préfixes multiplicateurs par 10 : déca, hecto et kilo de même que les préfixes diviseurs par 10 : déci, centi et milli.

Nous sommes amenés en informatique à devoir chiffrer des grandeurs très grandes et d'autres très petites. La pratique du système métrique nous a habitués à exprimer ces nombres à l'aide de multiples de 10 et même souvent de 1000. Cela correspond à notre habitude de regrouper les chiffres par trois comme dans 1 000 ou 1 000 000 = 10^3 et 10^6

Pour les grands nombres, les puissances successives de 10^3 portent ces noms :

kilo	**k**	↔	10^3
méga	**M**	↔	10^6
giga	**G**	↔	10^9
tera	**T**	↔	10^{12}
peta	**P**	↔	10^{15}
exa	**E**	↔	10^{18}

Les petits nombres s'expriment au moyen des puissances de 10^{-3} :

milli	**m**	↔	10^{-3}
micro	**µ**	↔	10^{-6}
nano	**n**	↔	10^{-9}
pico	**p**	↔	10^{-12}
femto	**f**	↔	10^{-15}

Unités composées

Très souvent quand les unités sont le produit ou le quotient d'autres unités, les notations de la multiplication ou de la division sont simplement reprises pour écrire et nommer les unités dérivées.

Exemples :

Le **kilowatt-heure** utilisé pour mesurer la consommation électrique est le produit d'une puissance et d'un temps. Deux notations sont autorisées **kWh** et **kW·h** ; le point qui marque la multiplication entre kW et h est un point à mis hauteur.

De même le symbole de l'**ampère-heure** peut s'écrire **Ah** ou **A·h** pour marquer qu'il s'agit du produit de deux unités, l'ampère et l'heure

Le **kilomètre par heure** et le **mètre par seconde** sont des unités composées obtenues par le calcul d'une division. Le signe **/**, en tant que signe de la division fait partie des symboles **km/h** et **m/s**.

Quand une même unité figure plusieurs fois dans un produit, un exposant indique le nombre de répétitions.

Exemples :

$1\ m \times 1\ m = 1\ m^2$ mètre carré, unité de surface
$1\ m^2 \times 1\ m = 1\ m^3$ mètre cube, unité de volume

L'accélération qui est la variation de la vitesse, s'exprime en "(mètres par seconde) par seconde". $(m/s)/s = m/s^2$ "mètre par seconde au carré".

Plus étrange encore ! ... des exposants négatifs

Il ne faudra pas s'étonner de voir des notations telles que ms^{-1}, L'exposant -1 est une autre manière d'écrire « par seconde ». Ainsi 1 ms^{-1} est simplement l'équivalent de 1 m/s.

De même les m/s^2 peuvent aussi s'écrire ms^{-2}

Attention - Erreurs fréquentes !

	Bon	Mauvais
gramme	**g**	gr
mètre	**m**	M
centimètre cube	**cm^3**	cc
tente centimètres	**30 cm**	30cm
kilomètre	**km**	Km
kilomètres à l'heure	**km/h**	kmh
minute	**min**	mn
seconde	**s**	sec

Pour en savoir plus

Les unités de mesure - http://www.metrologie-francaise.fr/fr/si/unites-mesure.asp

Bureau International des Poids et Mesures - *http://www.bipm.org/fr/measurement-units/*

3. Fractions

Définition	3-1
Comparons des fractions	3-2
Transformation des fractions	3-3
Simplification	3-3
Aditions et soustractions	3-4
Multiplication de fractions	3-5
Division de fractions	3-5
Exercices	3-6

Définition

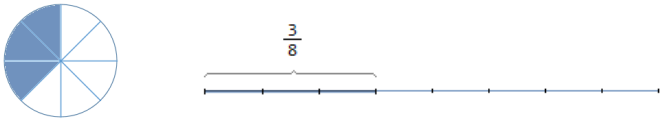
Une fraction est une division écrite sous la forme $\frac{a}{b}$

Le terme diviseur situé sous la barre de fraction est appelé dénominateur.
Il sert à dénommer les parts de la division. Il leur donne leur nom : demi, tiers, quart, cinquième, …, dixième, … millième, … etc.

Le numérateur situé au-dessus de la barre de fraction sert à dénombrer les parts.

Exemple : 3/8

La fraction $\frac{3}{8}$ pourrait être imaginée comme un disque partagé en huit portions égales dont on n'en considère que trois. Ou encore par une droite divisée en huit parties égales, appelées huitièmes dont on n'en prend que trois.



Le dénominateur, 8 dans notre exemple nous amène à dénommer les parts égales : les « huitièmes »

Le dénominateur ne peut pas être nul.

« Dénomination »

Sauf pour demi, tiers et quart, le nom du dénominateur se dit en lisant le nombre que l'on fait suivre par la terminaison *ième* : cinquième, neuvième, quarante-cinquième, centième, millième etc.

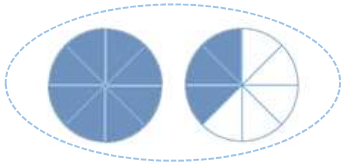
Notons qu'à l'exception du demi, les noms des dénominateurs correspondent aux **adjectifs ordinaux**. « *Soixante-quatrième* » peut être :

- un dénominateur comme dans $\frac{5}{64}$
- ou l'ordinal comme quand on parle du 64e joggeur qui passe la ligne d'arrivée.

Numérateur

Le numérateur sert à compter les parts.
Il peut avoir une valeur inférieure, égale ou supérieure à celle du dénominateur.
La valeur de la fraction est alors respectivement : inférieure, égale ou supérieure à 1.

Exemple : $\frac{11}{8} > 1$



Nombres entiers et nombres décimaux

Remarquons que tous les nombres entiers pourraient s'écrire sous la forme $\frac{N}{1}$

Exemples : $3 = \frac{3}{1}$ $-12 = \frac{-12}{1}$

Les nombres décimaux que l'on écrit avec n décimales (un nombre fini de chiffres après la virgule) peuvent s'écrire sous la forme d'une fraction où le dénominateur est 10, 100, 1000 ou 10^n suivant qu'il y a 1, 2, 3 ou *n* chiffres après la virgule.

Exemples de fractions décimales :

$0{,}5 = \frac{5}{10}$ $0{,}125 = \frac{125}{1000}$ $2{,}5 = \frac{25}{10}$ $3{,}14 = \frac{314}{100}$

« Cinq dixièmes » « 125 millièmes »

Comparons des fractions

- **Quand les dénominateurs sont identiques**, la fraction la plus grande est celle qui compte le plus de parts. C'est celle dont le numérateur est le plus grand $\frac{3}{10} < \frac{7}{10} < \frac{9}{10}$
- **Quand les dénominateurs sont différents** comme par exemple $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ et $\frac{55}{60}$.
  La comparaison entre ½ et ¼ est rapide car les numérateurs étant identiques, il est évident que ¼ est plus petit que ½ puisque le même numérateur est divisé en plus de parts, 4 au lieu de 2.
  La comparaison de demis $(\frac{1}{2})$ et de quarts $(\frac{1}{4})$ à des soixantièmes $(\frac{55}{60})$ est plus difficile.
  Il faut pour cela réduire les fractions au même dénominateur . $\frac{1}{2} = \frac{30}{60}$ et $\frac{1}{4} = \frac{15}{60}$
  Les dénominateurs étant maintenant identiques on voit immédiatement que $\frac{30}{60} > \frac{15}{60}$

NB. Notre habitude à « fractionner » les heures en 60 minutes aurait pu nous aider pour cet exemple. (Une heure = 60 minutes, ½ h = 30 minutes (30/60) et ¼ h = 15 minutes (15/60)

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{2} < \frac{55}{60} \leftrightarrow \quad \frac{15}{60} < \frac{30}{60} < \frac{55}{60}$$

Nous verrons plus en détail comment réduire les fractions au même dénominateur dans le paragraphe qui traitera des additions et des soustractions de fractions.

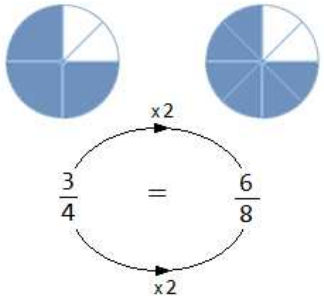
Transformation des fractions

La valeur d'une fraction ne change pas si on multiplie ou si l'on divise le numérateur et le dénominateur par un même nombre.

$$\frac{n}{d} = \frac{n \times N}{d \times N} \qquad \frac{n}{d} = \frac{n : N}{d : N} \qquad (avec\ d\ et\ N \neq 0)$$

Exemples : $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{5}{10} = \frac{30}{60} = \cdots = \frac{1 \times N}{2 \times N}$ Ce sont des **fractions équivalentes**

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$$



Les parts du gâteau sont deux fois plus petites mais cela revient au même si on en reçoit deux fois plus.

Exercice : Reliez par un trait les fractions équivalentes (il doit il y avoir 6 liaisons)

$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{15}{45}$	$\frac{50}{100}$	$\frac{15}{60}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{12}{45}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{10}$

Simplification

Simplifier une fraction, c'est la transformer en une équation équivalente dont les numérateurs et dénominateurs sont moindre. Il faut pour cela trouver les valeurs qui divisent à la fois les deux termes de la fraction. Ce n'est pas trop difficile si on maîtrise bien les tables de multiplications.

La fraction est dite **irréductible** lorsqu'on ne peut la simplifier davantage.

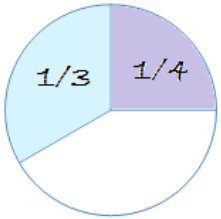
Exemple : $\frac{270}{360} = \frac{10 \times 27}{10 \times 36} = \frac{27}{36} = \frac{9 \times 3}{9 \times 4} = \mathbf{\frac{3}{4}}$

$\frac{3}{4}$ est une fraction irréductible. Il est impossible de la simplifier encore plus.

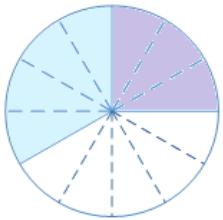
Aditions et soustractions

Nous savons que l'addition et la soustraction sont des opérations qui ne peuvent se faire qu'avec des objets de même nature « *On n'additionne pas des pommes et des poires* ». Dans le cas des fractions, on ne peut additionner ou soustraire que des fractions dont les dénominateurs sont identiques, des tiers avec d'autres tiers, des quarts avec des quarts, mais jamais des tiers et des quarts.

Exemple : Tâchons de nous représenter l'addition $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$



Quelle part cela fait-il du gâteau ?
Il faut d'abord subdiviser les parts à additionner, le tiers et le quart en parts égales.



On y parvient
en divisant le tiers en quatre

$$\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$$

et en divisant le quart en trois

$$\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$$

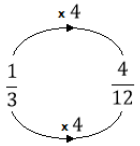
$\frac{1}{3}$ et $\frac{4}{12}$ sont des fractions équivalentes. Elles représentent bien la même portion de gâteau.

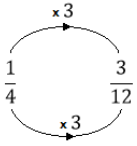
Idem pour $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{12}$. Les subdivisions étant maintenant égales, nous pouvons compter le total en douzièmes.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$$

La principale difficulté consiste donc à trouver comment transformer chaque fraction pour trouver des fractions équivalentes ayant toutes le même dénominateur.

Le **dénominateur commun** sera un multiple de tous les dénominateurs présents dans l'addition.





Autres exemples d'additions et de soustractions de fractions

$\frac{2}{5} - \frac{4}{15}$

Le dénominateur commun sera 15. C'est à la fois un multiple de 5 et de 15

Le calcul devient donc : $\frac{6}{15} - \frac{4}{15} = \frac{2}{15}$

$\frac{1}{6} + \frac{3}{4}$

Le dénominateur commun doit être un multiple de 6 et de 4
On pourrait prendre 6 * 4 = 24

mais 12 est un plus petit multiplicateur et les calculs seront donc plus faciles.

En effet 12 est commun à la table de multiplication par 6 : 6, **12**, 18

Et à la table de 4 : 4, 8 , **12**, 16, …

Le calcul devient donc : $\frac{1}{6} + \frac{3}{4} = \frac{2}{12} + \frac{9}{12} = \frac{11}{12}$

$\frac{7}{16} - \frac{3}{16}$

Ici le dénominateur étant identique pour chaque terme de la différence, la réduction au dénominateur commun n'est pas nécessaire. On peut de suite soustraire les numérateurs.

$\frac{7}{16} - \frac{3}{16} = \frac{4}{16}$ Qu'on peut simplifier : $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

$\frac{3}{4} + 2$

$\frac{3}{4} + \frac{8}{4} = \frac{11}{4}$ L'entier 1 a été transformé en une fraction équivalente

---

Multiplication de fractions

Pour multiplier des fractions, il suffit de multiplier les numérateurs entre eux pour le dessus et les dénominateurs entre eux pour le dessous.

$$\frac{a}{b} * \frac{c}{d} * \dots * \frac{m}{n} = \frac{a * c * \dots * m}{b * d * \dots * n}$$

On peut quand c'est possible bien sûr procéder à des simplifications entre n'importe quel facteur du numérateur et n'importe quel autre facteur du dénominateur.

Exemple :

$$\frac{3}{8} * \frac{12}{25} = \frac{3}{\cancel{8}_{2}} * \frac{\cancel{12}^{3}}{25} = \frac{3 * 3}{2 * 25} = \frac{9}{50}$$

Division de fractions

Diviser par une fraction c'est multiplier par la fraction inverse

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} * \frac{d}{c} \qquad \frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{8} * \frac{2}{1} = \frac{3}{4}$$

Exercices

1. Quelle fraction de l'Euro représentent 0,50€, 10 cents, 0,25 €, 0,20 €, 0,05 €, 2 cents ?
2. Quelle fraction de l'heure représentent 30 minutes, 20 , 15 , 12 , 10 , 6 , 5 , 4 et 3 minutes ?
3. Écrire de 2 manières différentes : 3 dixièmes, 7 millièmes, 125 centièmes, 250 millièmes
4. Écrire l'inverse de :

   $\frac{3}{4}$ $\frac{15}{28}$ $\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{4}$ 2 $\frac{5}{100}$

5. Classer dans l'ordre croissant $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{1000}$ et 0,004

6. Rendre les fractions suivantes irréductibles

   $\frac{6}{15}$ $\frac{48}{64}$ $\frac{75}{165}$ $\frac{42}{64}$

   $\frac{125}{750}$ $\frac{192}{176}$ $\frac{192}{648}$ $\frac{126}{154}$

   $\frac{90}{105}$ $\frac{133}{154}$ $\frac{84}{132}$ $\frac{424}{672}$

7. Calculer

   $\frac{9}{2} + \frac{5}{4}$ $\frac{3}{8} + \frac{7}{12}$ $\frac{4}{15} + \frac{5}{3}$ $\frac{4}{9} + \frac{5}{18}$

   $\frac{11}{10} * 2$ $\frac{11}{10} : 2$ $\frac{5}{8} * 4$ $\frac{5}{8} * 12$

   $\frac{10}{3} * 2$ $\frac{10}{3} : 2$ $\frac{3}{5} * \frac{6}{9}$ $\frac{12}{21} * \frac{7}{4}$

   $\frac{4}{48} + \frac{5}{4}$ $\frac{4}{48} * \frac{5}{4}$ $\frac{13}{42} * \frac{6}{39}$ $\frac{11}{12} - \frac{7}{18}$

   $0{,}36 : 0{,}018$ $0{,}3 * 0{,}017$ $0{,}65 - \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2} : \frac{5}{10}$

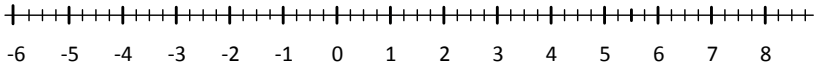
8. Compléter par $>$, $=$ ou $<$

$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$		$\frac{5}{11}$	$\frac{7}{11}$
$\frac{6}{28}$	$\frac{9}{14}$		$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{3}$		$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{17}{51}$		$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$		$\frac{55}{100}$	$\frac{3}{5}$

9. Simplifier au maximum

$\frac{120}{-30}$ $\frac{91}{52}$ $\frac{147}{49}$ $\frac{75}{100}$ $-\frac{128}{256}$ $\frac{15*4}{-20}$ $\frac{336}{168}$ $\frac{192}{768}$

10. Placez les fractions de l'exercice précédent sur la droite graduée ci-dessous



11. Il y a un intrus dans chaque tableau. Barrez-le.

Un tiers de 3/4	1/4
0,25	0,15
0,75 : 3	$\frac{1}{3} * \frac{3}{4}$

$\frac{1}{5}+\frac{1}{3}$	$\frac{16}{30}$
$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$

1,5	$\frac{1}{5}$
$\frac{3}{2}$	$\frac{15}{10}$

$\frac{1}{10} * \frac{1}{100}$	$\frac{2}{1000}$
$\frac{1}{1000}$	10^{-3}

$\frac{16}{30}$	$\frac{8}{15}$
$\frac{24}{60}$	$\frac{48}{90}$

0,3	$\frac{1}{3}$ *de* 0,09
$\frac{0,09}{3}$	0,03

4. Puissances de 10

Utilité des puissances de 10

L'écriture naturelle de nombres très grands ou très petits se fait avec beaucoup de zéros avant ou après la virgule.

Exemples :

- La vitesse de la lumière en mètres par secondes : 300 000 000 m/s
- La fréquence d'un processeur tournant à 2 GHz : 2 000 000 000 Hz
- La durée d'un cycle de ce processeur : 0,000 000 000 5 s = 0,5 ns (½ nanoseconde)

Faire des calculs avec de tels nombres peut se faire en écrivant de longues séries de zéros.
Voici par exemple comment on calculerait la distance parcourue par un signal électrique en 0,5 ns

$$Distance = Vitesse \times temps = 300\,000\,000\ \frac{m}{s} \times 0{,}000\,000\,000\,5\ s = 0{,}15\ m$$

Cette réponse 0,15 m (15 cm) est-elle bien correcte ? Pour en être sûr, il faut avoir une bonne maîtrise des nombres de pareilles tailles. C'est la raison d'être des notations avec puissances de 10.
Le calcul ci-dessus s'écrit plus simplement $3 . 10^{8} \times 5 . 10^{-10} = 15 . 10^{-2}$

Cette méthode consiste à faire séparément $3 \times 5 = 15$ et $10^{8} \times 10^{-10} = 10^{8-10} = 10^{-2}$

Conventions d'écriture

$$10^{n} = \underbrace{100\ldots0}_{\text{n zéros}} \qquad 10^{-n} = \frac{1}{10^{n}} = \frac{1}{\underbrace{100\ldots0}_{\text{n zéros}}} = \underbrace{0{,}00\ldots01}_{\text{n zéros}}$$

Exemples : $10^{3} = 1\,000$ $10^{12} = 1\,000\,000\,000\,000$

$10^{-3} = 0{,}001$ $10^{-12} = 0{,}000\,000\,000\,001$

Définition

Rang d'un chiffre

Nous appelons rang d'un chiffre la position que ce chiffre occupe dans un nombre.

Ainsi pour le nombre 946,75

2 1 0 -1 -2
946,75

- Le chiffre 9 occupe le rang 2, c'est le chiffre des centaines (10^{2})
- Le chiffre 4 occupe le rang 1, c'est le chiffre des dizaines (10^{1})
- Le chiffre 6 occupe le rang 0, les unités (10^{0})
- Le chiffre 7 occupe le rang -1, les dixièmes (10^{-1})
- Le chiffre 5 occupe le rang -1, les centièmes (10^{-2})

L'**ordre de grandeur** d'un nombre est donné par le rang de son premier chiffre significatif.

Exemples :

- Le premier chiffre significatif de 946,75 est de rang 2
  ⇒ Ce nombre est de l'ordre des centaines 10^{2}
- Pour 0,0025, le premier chiffre significatif est 2 son rang est -3.
  ⇒ Ce nombre est de l'ordre du millième 10^{-3}

Notation scientifique normalisée

La notation scientifique normalisée, scinde l'écriture des nombres en deux :

- On écrit les chiffres significatifs en plaçant la virgule après le premier
- puis on multiplie par la puissance de 10 qui convient pour donner l'ordre de grandeur.

L'exposant de 10 est donc le rang qu'occupe le premier chiffre lorsque le nombre est écrit de manière habituelle.

Exemples :

$356 = 3{,}56\ 10^{2}$	$0{,}356 = 3{,}56\ 10^{-1}$	$10\,240 = 1{,}024\ 10^{4}$
$0{,}001\,024 = 1{,}024\ 10^{-3}$	$97\,500\,000 = 9{,}75\ 10^{7}$	$0{,}000\,975 = 9{,}75\ 10^{-4}$

Écrivez en notation scientifique normalisée

$2\,014 =$	$12\,500 =$	$0{,}025 =$
$0{,}000\,084 =$	$380\,000 =$	$0{,}002 =$

N.B. Cette règle d'un seul chiffre significatif devant la virgule, la normalisation stricte de la notation scientifique n'est pas toujours indispensable. A l'usage on constate qu'elle est pratique pour faire certains calculs mais par contre 3,56 10^{2} est moins lisible que 356.

De même les puissances de type 10^{3}, 10^{6} et 10^{9} dont l'exposant est un multiple de 3 sont plus lisibles que d'autres car elles correspondent à des multiples plus courants : milliers, millions, milliards.

Kilo, méga, giga … milli, micro, nano …

Les préfixes habituels du système métrique qui opèrent par multiples ou fractions de 10 comme *déca_*, *hecto_*, *kilo_* ou dans l'autre sens *déci_*, *centi_* et *milli_* sont insuffisants pour désigner de très grands ou très petits nombres.

L'informatique entre autre, nous a habitués à de nouveaux préfixes multiples ou fractions de mille $1000 = 10^{3}$

T téra	G giga	M méga	k kilo		m milli	µ micro	n nano
10^{12}	10^{9}	10^{6}	10^{3}	1	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}
1000^{4}	1000^{3}	1000^{2}	1000		1000^{-1}	1000^{-2}	1000^{-3}
	Milliard	*Million*	*Millier*	*Unité*	*Millième*	*Millionnième*	*Milliardième*

Mieux vaut oublier le *billion* trop ambigu puisqu'il signifie milliard en anglais mais mille milliards en français.

La capacité de stockage de la mémoire d'un PC ou d'un téléphone portable s'exprime en **Mo** (méga-octets) ou en **Go** (giga-octets) soit l'équivalent de millions ou de milliards de caractères.

Les volumes de données Internet que vous permettent d'échanger les multiples formes d'abonnement des fournisseurs d'accès à Internet (FAI) et autres opérateurs mobiles, sont eux aussi donnés en Mo ou en Go.

La puissance nominale de la centrale nucléaire de Tihange est d'un peu plus de 3 **GW** (3 Giga watt) fournis par trois réacteurs (962 **MW** + 10008 MW + 1054 MW) avec une production annuelle de 18 **TWh** (18 Téra wattheure)

Application : 0,020 s = ... ms 1050 g = ... kg 0,000 002 5 g = ... µg

512 000 000 B = ... MB = ... GB 1 TB = ...MB

Notation ingénieur Puissances de 1000

La notation ingénieur est une notation scientifique où sont privilégiés les multiples et sous multiples de 1000 ; comme lorsque l'on utilise les préfixes multiplicateurs et diviseurs dont il est question au paragraphe précédent.

Règle de base : L'ordre de grandeur est donné par une puissance de 10 avec exposant multiple de 3.
Le nombre de chiffres devant la virgule va varier de 1 à 3 suivant les cas.

Exemples :

356 = 356	0,356 = 356 10^{-3}
1024 = 1,024 10^{3}	0,001024 = 1,024 10^{-3}
97.500.000 = 97,5 10^{6}	0,000975 = 975 10^{-6}

Écrivez en notation ingénieur

2 014 =	12 500 =
0,025 =	0,000 084 =
380 000 =	0,002 =

Ecrivez ces nombres 1° en notation scientifique normalisée et 2° en notation ingénieur

3 500	0,000 0045	125	0,00125
680 000 000	720 10^{-6}	25,4 10^{-2}	0,020 10^{6}

En pratique

A moins que l'on exige de vous que vous écriviez en notation scientifique normalisée (un seul chiffre significatif devant la virgule) ou en notation ingénieurs (multiples et sous multiples de 1000) le même nombre peut s'écrire indifféremment de plusieurs manières toutes aussi justes l'une que l'autre.

12 000 = 12 . 10^{3} = 1,2 . 10^{4} ou même 120 . 10^{2}, 0,12 . 10^{5} mais clairement, certaines de ces notations deviennent inutilement compliquées. Il arrive cependant qu'on les rencontre suite par exemple à des calculs. Il faut alors pouvoir les réécrire plus simplement.

Que valent les nombres ci-dessous ?

166 . 10^{-2} =	2,5 . 10^{4} =
750 . 10^{-3} =	12,5 10^{-3} =
0,018 . 10^{6} =	9,8 . 10^{9} =
0,5 . 10^{3} =	60 . 10^{-1} =
0,05 . 10^{3} =	680 000 . 10^{-5} =

Quels exposants donner à 10 pour que les valeurs suivantes ?

0,000 125 = 125 . $10^{\cdots}$	0,000 125 = 1,25 . $10^{\cdots}$
850 000 000 = 850 . $10^{\cdots}$	850 000 000 = 8,5 . $10^{\cdots}$

Calculs avec puissances de 10

Comment faites-vous pour multiplier 10 000 par 100 ? On ajoute deux zéros à 10 000 (1)

Comment faite vous pour diviser 10 000 par 100 ? Vous retranchez deux zéro à 10 000 (2)

Comment faite vous pour élever 10 000 au carré ? Vous multipliez le nombre de zéros par deux (3)

Les règles de calculs avec les exposants de 10 ne font rien d'autre que ce que vous faites déjà.

(1) 10.000 x 100 → 10^{4} x 10^{2} = 10^{4+2} = 106

(2) $\frac{10.000}{100}$ → $\frac{10^{4}}{10^{2}} = 10^{4-2} = 10^{2}$

(3) 10.000^{2} → $(10^{4})^{2} = 10^{4\times 2} = 10^{8}$

Calculez en passant par les puissances de 10

0,004 . 0,000 012 =	20 000 . 500 000 =
18 000 . 0,002 =	0,000 025 . 800 000 =
300 000 ² =	0,002² =
0,3³ =	

Terre, lune et soleil

De tous les objets célestes du système solaire, il y en a au moins trois que vous devez connaître

Voici leurs masses :

Terre : 5,97 10^{24} kg Lune : 7,35 10^{22} kg Soleil : 1,99 10^{30} kg

Vérifiez que : La lune est un peu plus que 80 fois moins massive que la terre.
Le soleil est plus de 333 000 fois plus massif que la terre.

Calculez en n'oubliant pas de faire autant de simplifications que possible

$$\frac{30 \cdot 10^{6}}{6 \cdot 10^{2}} \qquad \frac{42 \cdot 10^{5}}{7 \cdot 10^{4}} \qquad \frac{81 \cdot 10^{9}}{45 \cdot 10^{7}}$$

$$\frac{500 \cdot 10^{6} \cdot 3600 \cdot 20 \cdot 10^{2}}{72 \cdot 10^{9} \cdot 25 \cdot 10^{3}} \qquad \frac{64 \cdot 10^{-3} \cdot 270 \cdot 10^{3}}{32 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}009}$$

Combien y a-t-il … ?

Combien y a-t-il de ps dans 0,15 µs ?

Combien y a-t-il de ns dans 0,15 µs ?

Combien y a-t-il de Mo dans 0,1 To ?

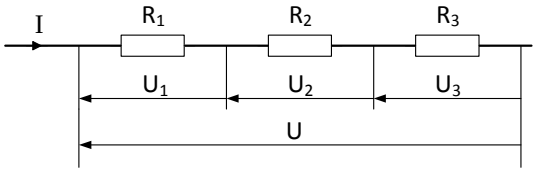
Combien y a-t-il de ko dans 0,25 Go ?

5. Couplage de résistances en série

Définition

Des résistances sont dites montées en série lorsqu'elles sont raccordées les unes à la suite des autres. Dans un circuit en série, chaque électron suit le même chemin depuis la première résistance jusqu'à la dernière sans jamais rencontrer de bifurcation.

Répartition du courant et des tensions



L'intensité du courant reste la même tout au long du circuit. $I = I_1 = I_2 = I_3$

La tension appliquée à l'ensemble se partage entre les résistances successives.

$$U = U_1 + U_2 + U_3$$

On peut donc écrire, en divisant par I chaque membre de l'égalité écrite ci-dessus

$$\frac{U}{I} = \frac{U_1}{I} + \frac{U_2}{I} + \frac{U_3}{I}$$

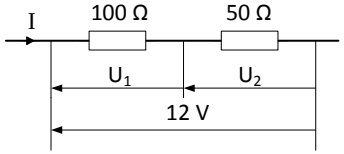
Ce qui, en appliquant la loi d'Ohm, peut s'écrire : $R_{éq.} = R_1 + R_2 + R_3$

Conclusion : La valeur de la **résistance équivalente** à un ensemble des résistances en série vaut la somme de ces résistances.

Exercice

Deux résistances de 100 Ω et 50 Ω sont couplée en série. On applique à l'ensemble une tension de 12 V. Calculez l'intensité du courant et la tension aux bornes de chaque résistance.

Données :



Inconnues : I = ? Ω U1 = ? V U2 = ? V

Solution :

$I = \frac{U}{R_{éq}}$ Nous savons que $U = 12\ V$ mais devons calculer $R_{éq}$.

$R_{éq.} = R_1 + R_2 = 100\ \Omega + 50\ \Omega = 150\ \Omega$

$I = \frac{U}{R_{éq}} = \frac{12\ V}{150\ \Omega} = 0{,}08\ A$

$U_1 = R_1\, I = 100\ \Omega \times 0{,}08\ A = 8\ V$

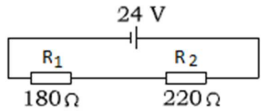
$U_2 = R_2\, I = 50\ \Omega \times 0{,}08\ A = 4\ V$

La somme des deux tensions trouvées donne effectivement les 12 V

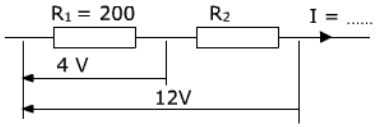
Exercices

1. On désire remplacer par une seule résistance, trois résistances de 120, 680 et 1000 Ω montées en série. Quelle sera sa valeur ?
2. Que vaut l'intensité du courant circulant dans un circuit comportant 4 résistances en série dont les valeurs sont 3 Ω, 6 Ω, 2 Ω et 4 Ω si l'ensemble est alimenté en 120 V ?
3. a) Ajoutez des flèches au dessin ci-contre pour représenter
   - Les tensions U1, U2 et U de la source de tension
   - L'intensité du courant

   b) Calculez
   - La résistance équivalente à l'association des deux résistances en série
   - L'intensité du courant dans le circuit
   - Les tensions aux bornes de chaque résistance



4. Un circuit alimenté en 15 V est constitué de trois résistances raccordées en série. R_1 = 3,6 Ω, R_2 = 5 Ω, R_3 = 3,4 Ω. Que vaut la tension aux bornes de R_3 ?
5. Calculez I et calculez ou mieux devinez sans calculer la valeur de R2



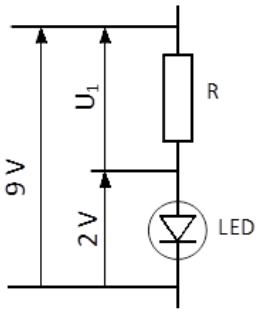
Applications

Résistance additionnelle

Lorsqu'un dispositif est prévu pour fonctionner sous une tension inférieure à la tension disponible, il arrive que l'on place une résistance additionnelle pour faire chuter la tension.

Ce serait le cas par exemple si l'on veut se servir d'une alimentation de 9 V pour alimenter une LED prévue pour fonctionner en 2 V avec un courant de 20 mA.

Remarque : Contrairement aux résistances, la tension aux bornes d'une LED reste pratiquement constante, quelle que soit l'intensité du courant qui la traverse. La LED claque si on lui impose une tension trop élevée !



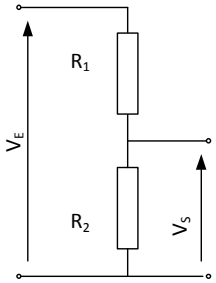
La résistance additionnelle que l'on place en série avec la LED doit provoquer une chute de tension de

$$9\ V - 2\ V = 7\ V$$

Et puisque $I = 20\ mA = 0{,}020\ A$

$$R = \frac{U_1}{I} = \frac{7}{0{,}02} = 350\ \Omega$$

Pont diviseur de tension



Le pont diviseur est un circuit fort simple puisqu'il ne comporte que deux résistances en série.

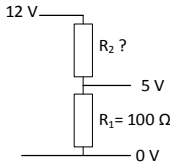
La tension d'entrée V_E est appliquée à l'ensemble des deux résistances tandis que la tension de sortie V_S prélevée aux bornes d'une des deux résistances n'est plus qu'une fraction de la tension d'entrée.

En supposant que le courant de sortie est négligeable, l'intensité absorbée par le circuit $I = \frac{V_E}{R_1 + R_2}$

La tension de sortie $V_S = I \,.\, R_2 = \frac{V_E \,.\, R_2}{R_1 + R_2}$

Exercice :

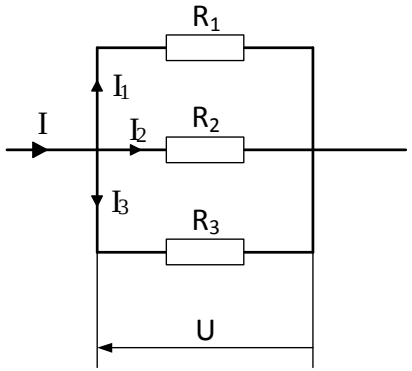
Le pont diviseur représenté par le schéma ci-contre doit fournir une tension de 5V à partir d'une tension d'alimentation de 12 V.
Une des deux résistances est connue, R_1 = 100 Ω.
L'autre résistance par contre est à remplacer car elle est détériorée. Quelle devrait être la valeur de R_2 ?



6. Couplage de résistances en parallèle

Description du montage

Les résistances sont couplées en parallèle ou en dérivation lorsqu'elles sont connectées entre les deux même bornes.



Résistance équivalente

Toutes les résistances d'un montage parallèle sont soumises à la même tension.

$$U \text{ est commun } (U = U_1 = U_2 = U_3)$$

L'intensité du courant se répartit entre les dérivations.

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

Et puisque I = U / R cela donne :

$$\frac{U}{R_{éq}} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3}$$

et si l'on divise par U

$$\frac{1}{R_{éq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Mais s'il y avait n résistances :

$$\frac{1}{R_{éq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}$$

Analogie hydraulique - Conductance

Lorsqu'on se représente le courant comme le passage d'un fluide on imagine facilement que chaque résistance ajoutée en dérivation offre un passage supplémentaire au courant. S'il s'agissait de conduites d'eau, la section équivalente à un ensemble de conduites en parallèle serait égale à la somme des sections de chaque tuyau.

Pour que l'analogie soit parfaite, il faudrait parler de **conductance** (≈ section des conduites) et non pas de **résistance** (≈ étroitesse des conduits).
La conductance (**G**) est l'inverse de la résistance (**R**).
L'unité de conductance est le siemens **S**.

$$G = \frac{1}{R}$$

La conductance équivalente est la somme de chaque conductance.
Tout comme en hydraulique la section équivalente d'un ensemble de conduites en dérivation est égale à la somme des sections de chaque conduite.

Cas particuliers

La formule $\frac{1}{R_{éq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}$ est applicable à tous les montages en dérivation

Si les n résistances sont toutes identiques :

$$R_{éq} = \frac{R}{n}$$

S'il n'y a que deux résistances en parallèle :

La formule initiale peut se transformer comme suit :

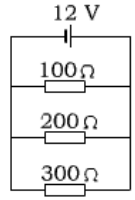
$$R_{éq} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Exercices

1. Trois résistances de 3, 10 et 15 ohms sont associées en parallèle.
   Faites une représentation schématique de ce montage et calculez la résistance équivalente.
2. Que vaut la résistance équivalente à 3 résistances de 51 Ω montées en parallèle ?
3. Calculez la valeur de la résistance équivalente pour chaque couple de valeurs données à R_1 et R_2 dans ce tableau :

R_1	10 Ω	10 Ω	15 Ω	15 Ω	30 Ω	30 Ω	50 Ω	72 Ω	80 Ω	150 Ω
R_2	10 Ω	40 Ω	30 Ω	60 Ω	20 Ω	45 Ω	200 Ω	24 Ω	20 Ω	30 Ω

4. Répondez aux questions suivantes dans l'ordre proposé :



   a) Que vaut l'intensité du courant dans chaque résistance du schéma ci-contre ?
   b) Que vaut l'intensité totale I ?
   c) Calculez la résistance équivalente $R_{éq}$
   d) Vérifiez que la résistance équivalente multipliée par l'intensité totale donne bien une tension de 12 V

5. Trois résistances couplées en dérivation sont soumises à une tension U.
   R_1 = 30Ω, R_2 = 45Ω et R_3 = 90 Ω. On mesure que l'intensité dans R1 est de 3 A.
   Calculez ce que vaut la tension U
   Que valent les intensités dans R2 et R3 ?
   Quelle est la résistance équivalente de ce montage ?
6. Deux résistances de 8 Ω et 12 Ω placées en parallèle laissent circuler un courant de 2 A.
   Si on branche une troisième résistance, R3 en parallèle, le courant devient 3,2 A.
   Déterminez la valeur de R_3
7. Un courant de 12 A se partage entre trois résistances en parallèle valant respectivement 3 Ω, 6 Ω et 8 Ω. Calculez le courant dans chaque résistance.
8. Quatre résistances sont montées en parallèle. R_1=24 Ω, R_2=72 Ω, R_3=90 Ω, la valeur de R_4 n'est pas connue mais on sait que la résistance équivalente au montage est de 12 Ω.
   Quelle est la valeur de R_4 ?
9. On dispose de deux résistances R_1=200 Ω, R_2=600 Ω qui ne peuvent supporter un courant supérieur à 75 mA.
   Calculez
   a) La tension maximale que l'on peut appliquer à chacune
   b) Le courant absorbé par ce montage lorsque les deux résistances sont groupées en parallèle et soumises à la tension maximale.

7. Couplage de résistances – Circuits mixtes

Position du problème

Certains regroupements de résistances comportent à la fois des montages en série et en parallèle.

Adoptons la notation suivante pour simplifier l'écriture des calculs de la résistance équivalente au montage de deux résistances R_1 et R_2.

- Si elles sont en série, on écrit : $R_e = R_1 + R_2$
- Si elles sont en parallèle, on écrit : $R_e = R_1 // R_2$

Peu importe la manière dont sera calculée $R_1 // R_2$.
On a vu pour le montage en parallèle, nous avons le choix entre plusieurs formules :

$\frac{1}{R_{éq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n}$ est le cas général.

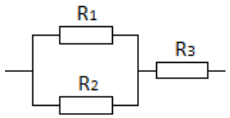
N'oubliez pas de retourner le résultat pour obtenir *Re*

$R_{éq} = \frac{R}{n}$ est plus rapide si toutes les résistances en parallèle sont identiques

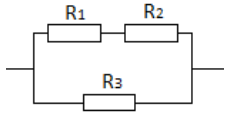
$R_{éq} = \frac{R_1 . R_2}{R_1 + R_2}$ est une formule plus facile (surtout si on utilise une calculatrice) mais elle n'est valable qu'avec deux résistances.

La difficulté avec ces circuits complexes consiste à les visualiser comme la des combinaisons des deux seuls montages que nous connaissons : le montage série et le montage parallèle.

Exemples



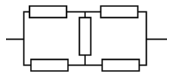
$R_e = (R_1 // R_2) + R_3$



$R_e = (R_1 + R_2) // R_3$

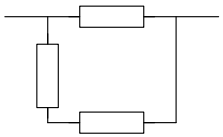
Différentes méthodes bien plus complexes que ce que nous aborderons ici permettrons à ceux qui ne redoute pas les équations de calculer les tensions, les intensités et les courant dans des circuits plus compliqués qui ne peuvent se décomposer facilement en montage série et parallèle.

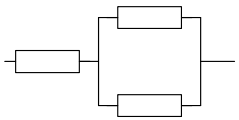
Comme par exemple :

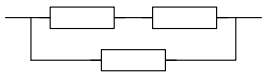


Exercices

1. Calculez les résistances équivalentes aux montages suivants :
   Chaque résistance à pour valeur 18 Ω



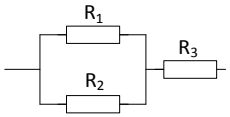




2. On dispose de quatre résistances de 12 Ω. Imaginez toutes les combinaisons possibles en prenant 1, 2, 3 ou 4 résistances pour avoir une variété de résultats allant de 3 Ω à 48 Ω.

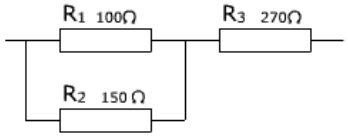
   (Vous devez obtenir les résistances équivalentes suivantes : 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 30, 36 et 48 Ω)

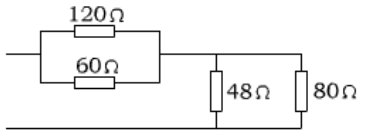
3. Une tension de 37 V est appliquée aux bornes de ce montage :
   R_1 = 400 Ω, R_2 = 600 Ω et R3 = 500 Ω
   Calculez :
   a) la résistance équivalente
   b) Les intensités dans R1, R2 et R3
   c) Les tensions aux bornes de chaque résistance

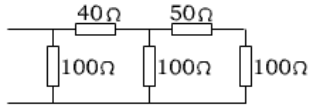


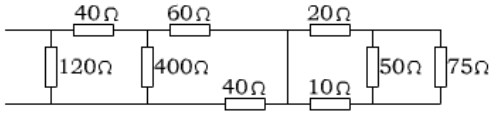
4. Calculez mentalement les résistances équivalentes à deux résistances mises en parallèle et ayant les valeurs suivantes : 5 et 5 Ω, 6 et 4 Ω, 7 et 3 Ω, 8 et 2 Ω, 9 et 1 Ω

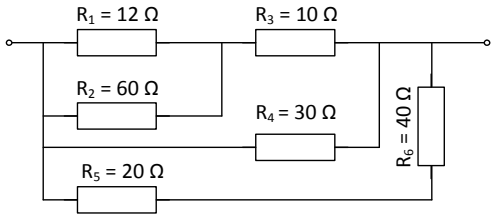
5. Calculez les résistances équivalentes aux montages suivants :











8. Coordonnées cartésiennes

La façon la plus naturelle de repérer un point dans un plan est certainement de donner sa position par rapport à deux axes perpendiculaires.

Imaginez par exemple que vous deviez expliquer où se trouve un point sur une page. Vous penserez probablement à dire qu'il est à autant de cm du dessus de la feuille et à quelle distance il est d'un des bords, gauche ou droit peu importe. Le dessus de la page et l'un des bords ont été choisis comme repères.

Les mathématiciens font pareil. Ils tracent deux axes perpendiculaires et leur donnent un sens, traditionnellement de bas en haut et de gauche à droite. Ce sont ces axes (et non les bords de la feuille) qui servent de repères. L'ensemble forme un repère dit « cartésien » en hommage à René DESCARTE, philosophe et mathématicien du 17e siècle, qui par cette technique fit le lien entre l'algèbre et la géométrie.

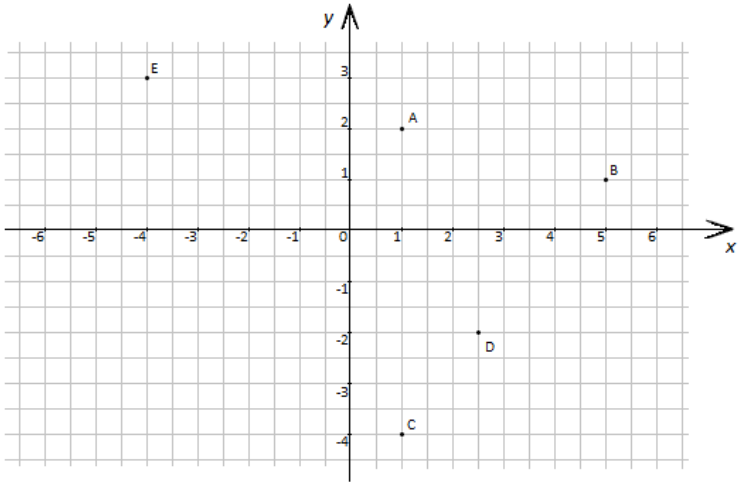
L'axe horizontal ou axe des *x* est appelé axe des abscisses. Il est dirigé vers la droite.

L'axe vertical, appelé axe des *y* ou des ordonnées est orienté vers le haut.

Chaque point peut ainsi être défini par un couple de valeurs (abscisse ; ordonnée) que l'on appelle ses coordonnées.

Ainsi dans le schéma ci-dessous les coordonnées du point A sont $x=1$ et $y = 2$.

Ce qu'on écrit comme suit : A (1 ; 2)



Quelles sont les coordonnées des points représentés

B : C : D : E :

Placer sur le plan cartésien les points F(3 ; - 4) et G (-5 ; - 4)

Tracer les segments de droite EF et AG

Quelles sont les coordonnées du point d'intersection des segments EF et AG : . . . . . .

Quelles sont les coordonnées du point exactement au milieu du segment AG : . . . . . .

B (5 ;1) C(1 ;-4) D(2,5;-2) E(-4 ;3) Intersection EF et AG =(-1 ;0) Milieu de AG = (-2 ;-1)

Sur une feuille quadrillée vierge mise verticalement,

1° Tracez deux axes x et y passant par le centre de la feuille.

2° Placer y les points suivants :

A (-1 ; 2) B (-6 ; 2) C(-6 ; -3)

Recherchez la position d'un point D tel que A, B, C et D forment un carré

E (-2 ; 4) F(3 ; -1) G (8 ; 4)

Recherchez la position d'un point H tel que les points E, F, G et H forment un carré

I (3 ; 1) J (-3 ; -2) K (0 ; -8)

Recherchez la position d'un point L tel que les points I, J, K et L forment un carré

M (-2 ; 0) N (2 ; 3) O (-1 ; 7)

Recherchez la position d'un point P tel que les points M, N, O et P forment un carré

9. Pourcentages

Introduction

La notion de pourcentage s'utilise à tout propos :

- pour les questions d'argent : TVA, remises, intérêts, pertes, bénéfices, etc.
- pour estimer les proportions des mélanges (% d'alcool dans le vin … dans le sang !)
- pour chiffrer des progressions (« augmentation de 200% », « diminution de 10% »)
- pour indiquer la pente d'une route,
- pour donner les côtes des interrogations et des examens,
- pour faire des statistiques,
- pour faire des offres publicitaires : « + 50% gratuit »

Avez-vous remarqué comme souvent les publicités recourent aux pourcentages ? Cela donne aux annonces des allures d'informations scientifiques, des apparences de vérités démontrées, sérieuses et incontestables. Et pourtant … !

Qu'est-ce qu'un pourcentage ?

Le pourcentage est une manière d'exprimer une proportion en se référant à un tout que l'on compare à 100 parts.

Un pourcentage n'est rien d'autre qu'une fraction dont le dénominateur est 100.

Exemples :

- Sur une classe de 25 élèves, 11 ont réussi en première session.

  Quel est le pourcentage de réussite ?

  $$\frac{11}{25} = 0{,}44 = \frac{44}{100} = 44\ \%$$

  N.B. « 44 % » signifie exactement la même chose que $\frac{44}{100}$ ou 0,44.
  Ce sont trois manières d'écrire la même valeur.

- Dans une autre classe de 35 élèves, il y a eu 14 réussites en première session.
  Cette classe est-elle meilleure que précédente ?

  On calcule le pourcentage de réussite de la même manière

  $$\frac{14}{35} = 0{,}40 = \frac{40}{100} = 40\ \%$$

  Le pourcentage de réussite 40 % est donc encore plus faible que pour la classe précédente (40% < 44%)

  N.B. Le pourcentage a permis la comparaison de deux classes qui pourtant ne comptaient pas le même nombre d'élèves.

Exercices

Traduire ces cotes en %

	15 / 20	10 / 20	17 / 20	24 / 40	16 / 40	60 / 120	84 / 120	96 / 120
Pourcents :								

Pourcents en plus ou en moins

- Le prix hors TVA d'une marchandise est de 140 €.
  Sachant que la TVA est de 21 %, quel sera le prix à payer ?

  Coût de la TVA : $21\%\ de\ 140\ € = \frac{21}{100} \times 140 = 29{,}4\ €$

  Coût total : $140\ € + 29{,}4\ € = 169{,}4\ €$

- Une remise de 10 % est accordée sur un article vendu normalement à 80 €

  Montant de la remise : 10 % de 80 € = $\frac{10}{100} \times 80\ € = 8\ €$

  On paiera donc $80 - 8 = 72\ €$

Remarquez que les calculs ci-dessus ont été faits en deux étapes :

1. Le calcul du pourcentage
2. L'ajout ou le retrait du pourcentage calculé.

On n'additionne pas des € et des %

On n'additionne pas (ni ne soustrait) des pommes et des poires.
Pourquoi le ferait-on avec des euros et des pourcents ?

Et pourtant, lors des soldes on voit des indications telles que **99€ - 15%**

Certaines calculatrices possèdent même une touche % et sur lesquelles on peut taper :
200 + 21 % = pour avoir la réponse attendue soit 242.

Mais d'autres donneront 200,21 comme réponse ! Logique puisque 21 % = 21/100 = 0,21

Et donc 200 + 21 % = 200 + 0,21 = 200,21 Mais ce n'est pas la réponse attendue !

Il faut :

- **Ou bien, faire le calcul en deux étapes :**
  1. Calculer les 21 % 200 x 0,21 = 42
  2. Puis ajouter 42 à la valeur de départ : 200 + 42 = 242
- **Ou mieux, ne faire qu'un seul calcul :**

Ajouter t% c'est multiplier par (1+t/100)

Retrancher t%, c'est multiplier par (1-t/100)

$$N \pm t\,\% = N \pm \frac{t}{100} \cdot N = N \cdot \left(1 \pm \frac{t}{100}\right)$$

Exemples :

+ 5 % → x 1,05 Ajouter 5% c'est multiplier par 1,05 (1+0,05)

- 5 % → x 0,95 Retrancher 5% c'est multiplier par 0,95 (1-0,05)

Complète ce tableau :

Prendre, augmenter ou diminuer de x %	*c'est multiplier par …*	*± x %*	** (1 ± x/100)*
Prendre 45 %	× 0,45	+ 5 %	× 1,05
Augmenter de 12 %	× 1,12	+ 22 %	
Diminuer de 20 %		- 22 %	
Diminuer de 7,5 %		- 75 %	
Prendre 18 %		+ 0,5 %	
Augmenter de 50 %		+ 200 %	
Diminuer de 25 %			× 0,99
Augmenter de 100 %			× 1,5

Risques d'erreurs

Quelle est la différence entre une offre de 50% gratuit et une réduction de 50% ?

+ 50 % GRATUIT

Au final cela revient à combien de pourcents de réduction ?

Le tout est de bien savoir quelle est la référence. Qu'est-ce qui est comparé à 100 parts ? La valeur initiale à laquelle on ajoute 50% ou le total dont 50% est offert ?

Exercices

1. On vous octroie une réduction de 20% sur un prix de 380 €. Quel est le montant de cette réduction ?

2. Le prix hors taxe d'un appareil est de 275 €.
   a. Quel sera le montant de la TVA si le taux de TVA est de 21% ?
   b. Quel sera le montant total à payer
   c. Comment pourrait-on calculer le montant à payer avec un seul calcul ?

3. Christopher explique qu'on lui a fait une réduction de 30% autrement dit de 75 €. Quel était le prix au départ ? Quel montant a-t-il payé ?

4. Le prix d'une imprimante après remise de 20% est de 140 €
   Quel était le prix initial ? (La règle de trois pourrait-être utile)

5. Les quatre membres d'un jury ont remis les côtes suivantes : 14, 12, 11 et 15 sur 20
   Faites la somme de ces points et calculez le résultat en pourcents.

6. Une machine est vendue 544,50 € TVA comprise. Quel est le prix hors TVA ?

7. M. Dupont gagne 1100 € par mois. M. Durant a un salaire de 1375 €.
   Quel est en % la différence entre ces deux salaires ?
   1. Si le salaire Pris comme référence est celui de M. Dupont
   2. Si l'on prend le salaire de M. Durant.

8. Une batterie rechargeable de 2100 mAh a épuisé 40 % de sa charge. Quelle quantité d'électricité y reste-t-il ?

9. Une marchandise vendue 320 € a été augmentée de 15% un mois avant les solde puis Le moment des soldes étant venu elle est soldée à -15%. Qu'est devenu le prix de vente ?

10. Déterminez les pourcentages

75 cl de vin	9 cl d'alcool	% en volume d'alcool
Sur un total de 600 points	Un étudiant en a obtenu 468	% de l'étudiant
Sur un salaire de 1400 €	Une retenue de 532 €	% de retenue
18000 € de frais de notaire	S'ajoute au prix de vente de 150 000 €	% de frais de notaire

11. Une ménagère prépare 20 kg de groseilles pour en faire de la gelée. Elle obtient 75 % de jus et y ajoute un poids égal en sucre. La cuisson fait perdre 10 % du poids de ce mélange. Combien de pots de 250 gr pourrait-elle remplir ?

12. Une foreuse portative achetée lors d'une journée spéciale « Remise de 15% sur tout » a coûté 186,15 €. Quel était son prix initial ?

13. 37 % des électeurs, soit 63751 personnes ont voté pour l'ancien président. Combien y avait-il d'électeurs ?

14. Un capital de 1000 € bloqué en banque pour une période de 5 ans rapporte 2% par an. Quelle sera la somme cumulée au bout des 5 ans ?

15. Une grande enseigne d'électroménager fait une semaine de promotion *« La TVA, pas pour moi ! »*. Vous profitez de l'occasion pour vous acheter un nouveau PC portable dont le prix habituel est de 499 €. En sachant que le taux de TVA en vigueur est de 21 %, et puisque la TVA est offerte, que vous coutera ce PC portable ?
    Quelle est la réduction dont vous avez réellement bénéficié ?

10. Proportionnalités

Grandeurs directement proportionnelles

Deux grandeurs sont directement proportionnelles si toute variation de l'une entraîne une variation de l'autre dans un même rapport.

- Sachant que la puissance dissipée par une résistance électrique se calcule par la formule[2] $P = U \,.\, I$ quelle est la puissance dissipée par une résistance alimentée en 230 V si l'intensité du courant est de 1, 2, … ou 16 A ?

Tableau à compléter

Intensité du courant I [A]	1 A	2 A	4 A	5 A	10 A	16 A
Puissance dissipée P [W]						

- A vitesse constante, la distance parcourue par un véhicule est proportionnelle au temps du parcours.
  Ex. Un véhicule circule à 90 km/h, la distance parcourue après 10, 15, 20, 30, 45 minutes est directement proportionnelle au temps :

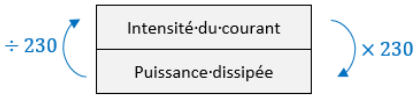
Tableau à compléter

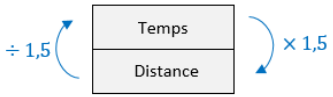
Temps	10 min	15 min	20 min	30 min	45 min	60 min	90 min
Distance [km]							

La formule qui exprime la relation entre le temps parcouru et le temps du parcours peut s'écrire : *d = ...*

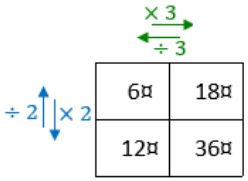
Coefficients de proportionnalité

L'observation des tableaux de proportionnalité qui précèdent nous montre que l'on passe d'une ligne à l'autre en multipliant ou en divisant par un coefficient de proportionnalité constant.





Pour trouver la valeur manquante dans les petits tableaux de proportionnalité à quatre cases, on a le choix entre deux coefficients de proportionnalités : entre lignes ou entre colonnes.



[2] La formule **P = U·I** n'est tout à fait exacte que dans le cas d'un appareil purement résistif. Elle convient mieux pour notre exemple que la formule générale en courant alternatif (**P = U·I·cosφ**)

Complétez ces tableaux en indiquant pour chacun le coefficient de proportionnalité qui vous semble le plus simple à utiliser.

3	12	4		3	7	24	40	10	30
5		6	30	15		6		30	

12	72	45	35	12		7,5	12	25	10
5		27		21	14	5		45	

Grandeurs inversement proportionnelles

Deux grandeurs sont inversement proportionnelles si quand l'une augmente (*ou diminue*) d'un certain nombre de fois, l'autre diminue (*ou augmente*) d'autant de fois. Les variations des deux grandeurs varient proportionnellement mais en sens inverse.

On peut aussi dire que l'une est proportionnelle à l'inverse de l'autre, ou encore que leur produit est constant.

- Une pompe vide cave dont le débit est de 200 litres par minutes met 4 heures (240 min) pour vider une cave inondée. Combien de temps durerait ce pompage si le débit était de 100, 400, 600 ou 800 litres par minute ?

Tableau à compléter

Débit [litres/min]	100	200	300	400	600	800
Durée						

Ici, contrairement à ce que nous avions vu avec la proportionnalité directe, il n'y a pas de coefficient de proportionnalité. On observera par contre qu'en multipliant le débit par la durée et ce pour n'importe quelle colonne du tableau ci-dessus on obtient toujours le même résultat. Il s'agit du volume d'eau à évacuer (48.000 litres)

Règle de trois

Bien que la règle de trois soit enseignée dès l'école primaire, bon nombre de personnes restent perdues devant les problèmes de proportionnalités.

Une des façons d'enseigner la règle de trois est de construire un tableau des proportionnalités à quatre cases. Le contenu de l'une de ces quatre cases est la valeur recherchée en partant des trois valeurs connues d'où le nom de la règle. La méthode de résolution pourrait se résumer comme suit :

Multiplier des deux valeurs connues sur une diagonale et diviser ce produit par la valeur restante.

Quantité	Prix
5	10
7	x

$$x = \frac{7 \times 10}{5}$$

Cette méthode est une recette efficace lorsqu'il existe une **proportionnalité directe** entre deux variables comme le prix à payer en fonction de la quantité achetée, les dosages, les conversions d'unités, les questions d'échelles des plans et des cartes etc.

Son défaut est qu'elle produit des résultats aberrants lorsqu'elle est utilisée de manière irréfléchie quand les grandeurs au lieu d'être **directement proportionnelles** sont **inversement proportionnelles**.

Méthode du passage à l'unité

Méfions-nous des recettes et des formules mal comprises car elles mènent à des erreurs grossières ! Place donc au raisonnement :

25 m de câble coûtent 17,50 €, combien coûtent 36 m ?

1) 25 m coûtent 17,50 €
2) 1 m coûte 25 fois moins → 17,50 / 25 (diviser par 25)
3) 36 m coûtent 36 fois plus → (17,50 / 25) x 36 (multiplier par 36)

Principe de résolution

1° Exprimer dans une première phrase le rapport qu'il y a entre deux des données.
Commencer cette première ligne en indiquant la valeur qui varie, ici la longueur ;
Puis terminer cette ligne en indiquant la valeur à recalculer, ici le prix.

2° Calculer ce que devient la grandeur de droite pour une valeur unitaire à gauche.
Attention ici au sens de la proportion. Directement ou inversement proportionnel ?
- Si la proportion est directe, toute variation des données à gauche donne une variation identique à droite. (Si on **divise** à gauche il faut **diviser** par le même nombre à droite)
- Si la proportion est inverse, toute des données à gauche donne une variation inverse à droite. (Si on **divise** à gauche il faut **multiplier** par le même nombre à droite)

3° Le rapport à une valeur unitaire étant établi, on évalue ce que devient la valeur recherchée en fonction de la modification de la troisième donnée.

La question essentielle est donc de savoir si la proportion considérée est directe ou inverse. C'est de la réponse à cette question que de manière logique dépend la décision de multiplier

ou de diviser. La méthode du passage par l'unité convient alors, aussi bien pour les grandeurs directement proportionnelles que si elles sont inversement proportionnelles.

N.B. Le passage par la valeur 1 n'est pas toujours indispensable. Si dans l'exemple ci-dessus la question avait été « Que coûtent 300 m de câble ? » on pourrait compter d'abord le prix de 100 m (4 x 25 m) puis multiplier ce résultat intermédiaire par 3 pour 3 x 100 m.

Exercices

1. Il a fallu une rame de 500 feuilles pour imprimer 125 prospectus. Combien faudra-t-il de feuilles pour imprimer 2000 prospectus ?
2. Marco met 20 minutes à pied pour se rendre à son lieu de travail. Il met 35 minutes pour aller de chez lui au terrain de foot. Sachant que son lieu de travail est à 1400m de chez lui, quelle est la distance entre son domicile et le terrain de foot ?
3. Un maçon pose et cimente 24 briques en presque exactement 10 minutes. Combien de temps lui faudrait-il théoriquement pour construire un mur de 200 briques à cette même cadence ?
4. Un technicien a payé 195 € pour une bobine de 300 m de câble réseau. Il a placé 60 m de ce câble chez un client. Quel est le coût réel du câble qu'il devra compter pour ce travail ?
5. Une éolienne produit 1500 kWh en 2h30. Combien produirait-elle d'énergie en 24h si la vitesse moyenne du vent reste identique ?
6. Un bâton de 1,50 m de hauteur projette une ombre de 1,32 m sur le sol.
Quelle est la hauteur d'un arbre dont l'ombre, à cet instant, mesure 8,40 m ?
7. Combien coûteront 7 tonnes de gravier si 400 kg ont coûté 62 € ?
8. Un câble de 1,5 mm² de section à une résistance de 5 Ω.
Quelle serait cette résistance si la section avait été de 2,5 mm² ?
9. Les pots de 500 g de miel ont une contenance de 375 ml. Combien de kilogrammes de miel peut-on mettre dans une cuve de 24 litres ?
10. Vous disposez de deux bobines de câble. L'une d'elles n'a pas encore été entamée. Son emballage encore intact porte une étiquette sur laquelle on peut lire : Section 2,5 mm² Longueur 100 m, Prix 24,99 €.
L'autre emballage est déchiré et une partie du câble a déjà été utilisée. Pour connaître la longueur restante de câble, on a la possibilité de comparer les poids des deux bobines. La première pèse 2,23 kg, la seconde pèse 1,45 kg. Quel calcul allez-vous faire pour connaître la longueur de câble qui reste dans la seconde bobine ?
11. Le chef de chantier avait prévu de mettre 10 électriciens pour effectuer une vaste installation en 30 jours ouvrables (6 semaines de 5 jours). Les travaux qui précèdent l'installation électrique ont mis une semaine de plus que le temps prévu. Combien d'ouvriers faudrait-il mettre sur ce chantier, pour faire ce même chantier en 5 semaines au lieu de 6 ?

Représentation algébrique d'une proportion directe

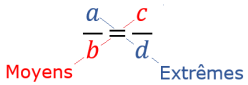
Une proportion directe n'est autre que l'égalité de deux rapports.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$ se lit : « *a* est à *b* comme *c* est à *d* »

On est en présence d'une équation. L'égalité subsiste si on multiplie ou si on divise les deux membres par une même valeur (différente de 0).

Présentée sous cette forme la proportion a une propriété fondamentale :

Le produit des extrêmes est égal au produit des moyens



Autrement dit $a.d = b.c$

Connaissant trois valeurs d'une proportion, il est aisé de calculer la quatrième.

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $a = \frac{b.c}{d}$ $d = \frac{b.c}{a}$ $b = \frac{a.d}{c}$ et $c = \frac{a.d}{b}$

Cette méthode dite du **produit en croix** est une variante de la règle de trois.
Mais elle ne convient que pour les questions de **proportionnalité directe,** alors que la règle de trois résolue par la **méthode du passage à l'unité** convient dans tous les cas, que la proportionnalité soit directe ou inverse.

Une autre propriété intéressante des proportions est que :

« **L'égalité est conservée si l'on permute les moyens et/ou les extrêmes** »

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ et $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$

Exercices

Recherchez dans les exercices de la page précédente, ceux qui sont relatifs à des proportions directes. Puis après avoir écrit ces proportions sous la forme d'une égalité entre deux rapports, cherchez la solution par la méthode du produit croisé.

11. Lois de Pouillet et de Matthiessen

La résistance d'un conducteur (à une température donnée) dépend de 4 paramètres :

1) La résistivité du conducteur
2) Sa longueur
3) Sa section
4) Sa température

Laissons provisoirement la température de côté pour nous intéresser aux trois premiers paramètres.

La résistivité

Les conducteurs ne sont jamais parfaits. Même les métaux les plus couramment utilisés comme conducteurs ont une certaine « résistivité ». On pourrait pour comparer les résistivités de chaque métal, mesurer la résistance en Ω d'un fil d'un mètre de longueur et de 1 mm² de section.

Voici les mesures obtenues :

Aluminium	0,0273 Ω	L = 1 m S = 1 mm²
Argent	0,0165 Ω	
Cuivre	0,017 Ω	
Etain	0,12 Ω	
Fer	0,13 Ω	

La longueur, la section et la température étant inchangées pour chaque essai, les différences obtenues ne peuvent provenir que d'une particularité propre à chaque matériau. C'est la résistivité.

La longueur

On imagine aisément que la résistance du conducteur est proportionnelle à sa longueur. Un même conducteur 2 fois plus long présentera une résistance deux fois plus grande.

La section

Tout comme une conduite d'eau, plus la section est large et plus le passage y sera facile. Plus le conducteur est gros et plus petite sera sa résistance. R est inversement proportionnel à S.

Le calcul de la résistance en fonction de ces trois paramètres est donné par la **loi de Pouillet** :

$$R = \frac{\rho . L}{S}$$

ρ Résistivité du matériau en $\frac{\Omega . mm^2}{m}$

L Longueur en *m*

S Section en *mm²*

Exemple : Imaginons que l'on doive calculer la résistance d'un fil de cuivre de 30 m de long et de 2,5 mm² de section.

Les mesures faites pour un fil de 1 m de cuivre et 1 mm² de section ont donné 0,017 Ω

La résistivité du cuivre est donc de $0.017 \frac{\Omega}{\frac{m}{mm^2}}$ = « 0,017 Ω par mètre et par millimètre carré »

Diviser par la fraction m/ mm² revient à multiplier par la fraction inverse mm²/m

Au final cela donne des Ω mm² / m ⇒ $0.017 \frac{\Omega mm^2}{m}$

Pour le conducteur de 30 m de long et de 2,5 mm² de section, l'application de la loi de Pouillet donne :

$$R = \frac{0.017 \frac{\Omega\, mm^2}{m} . 30\, m}{2{,}5\, mm^2} = 0.204\, \Omega$$

NB. Certains préfèrent exprimer la résistivité en en Ωm. 1 mm² = 10^{-6} m²

⇒ 1 Ω mm² / m = 10^{-6} Ωm Ex. pour le cuivre ρ = 0,017 Ω mm² /m = 17 10^{-9} Ω m

Influence de la température – Loi de Matthiessen

La température influence l'agitation thermique des molécules et cela freine généralement le déplacement des électrons. C'est le cas pour les métaux et des alliages alors que dans le cas du carbone par exemple l'agitation thermique provoque l'effet inverse, elle y diminue la résistivité.

Coefficient de température α

On appelle coefficient de température α le coefficient multiplicateur de la résistance lorsque sa température s'élève de 1 degré.

Exemple : Supposons un long fil de cuivre dont la résistance R = 200 Ω à 20°C
Sachant que le coefficient de t° du cuivre α = 0,0038
De combien d'Ohms varie cette résistance si elle n'est plus à 20 mais à 21° ?

⇒ La variation de R est $\alpha . R = 200\ \Omega * 0{,}0038 = 0{,}76\ \Omega$

Même question si on passe de 20° à 100° (accroissement de température de 80°)

⇒ Cette fois, la variation de la résistance est 80 fois plus importante

200 Ω * 0,0038 * 80 = 60,8 Ω Ce qui est nettement moins négligeable !

L'unité du coefficient α est le « par degré » 1/°K ou encore K^{-1} (K pour degré Kelvin)

L'accroissement de résistance $\Delta R = R_i . \alpha . \Delta t$

R_i = la résistance initiale en Ω

α (alpha) = le coefficient par degré

Δt = la variation de température en degrés

Cette variation de résistance ΔR s'ajoute à la résistance initiale R_i

La résistance à chaud devient $R_t = R_i + \Delta R = R_i + R_i.\alpha.\Delta t = R_i (1 + \alpha . \Delta t)$

La loi de Matthiessen est souvent donnée sous la forme :

$$R_t = R_i (1 + \alpha . \Delta t)$$

R_i Résistance à la température initiale

α Coefficient de température

Δt Variation de température

R_t Résistance à la température finale

Tables des résistivités et des coefficients de température

Substance	ρ à 20°C $\frac{\Omega\, mm^2}{m}$	α à 0°C K^{-1}	α à 20°C K^{-1}
Acier coulé	0,13	+ 0,00748	+ 0,00651
Aluminium	0,0278	+ 0,0040	+ 0,0037
Argent	0,016	+ 0,0041	+ 0,00379
Carbone	40	- 0,0003	- 0,0003
Constantan	0,49	- 0,00003	- 0,00003
Cuivre	0,017	+ 0,0041	+ 0,00386
Étain	0,12	+ 0,0046	+ 0,0042
Graphite	8	- 0,0002	- 0,0002
Manganine	0,423	- 0,00001	- 0,00001

Substance	ρ à 20°C $\frac{\Omega\, mm^2}{m}$	α à 0°C K^{-1}	α à 20°C K^{-1}
Mercure	0,941	+ 0,0009	+ 0,0009
Nickel	0,087	+ 0,0043	+ 0,0040
Nickeline	0,5	+ 0,00023	+ 0,00023
Or	0,024	+ 0,0043	+ 0,0040
Platine	0,105	+ 0,0042	+ 0,0039
Plomb	0,22	+ 0 ,0042	+ 0 ,0040
Tungstène	0,054	+ 0,0049	+ 0,0045
Zinc	0,061	+ 0,0040	+ 0,0037

Exercices

1. Calculez la résistance d'un fil de cuivre de 500 m de long et de 1,2 mm de diamètre

   Réponse : R = 7,52 Ω

2. Calculez la résistance d'une barre de cuivre de 5 m de longueur et dont la section rectangulaire est de 20 mm sur 5 mm

   Réponse : R = 0,000 85 Ω

3. Calculez la résistivité en Ω mm²/m et en Ωm d'un fil de longueur de 1 km et de section 4 mm² dont la résistance vaut 12 Ω.

   Réponse : $\rho = 0{,}048\ \frac{\Omega\, mm^2}{m} = 48.10^{-9}\Omega m$

4. La distance entre le centre téléphonique et le poste de téléphone vaut 5 km. La ligne est constituée de fils de 2 mm de diamètre dans un matériau dont la résistivité est 67.10^{-9} Ωm. Déterminez la résistance de la ligne téléphonique.

   Réponse : R = 213 Ω

5. Quelle doit être la section en mm² d'un fil de constantan pour que sa résistance soit de 0,5 Ω par mètre ?

   Réponse : S = 0,98 mm²

6. Quelle longueur de fil de ferronickel (0,8 Ω mm² / m) de 0,8 mm de diamètre faut-il prendre pour faire une résistance de 1 Ω ?

   Réponse : L = 0,625 m

7. Quel doit être le diamètre d'un fil de manganin ($420\ 10^{-9}$ Ωm) pour que sa résistance soit de 2 Ω par mètre ?

   Réponse : d = 0,52 mm

8. Quelle est la résistance à 20°C d'un fil de cuivre de 200 m de long et de 0,5 mm² de section sachant que sa résistivité à 20°C est de 0,017 Ω mm² / m ?
   Quelle est la résistance de ce même fil à 100°C ? (α = 0,0038 K^{-1})

   Réponses : R_{20} = 6,8 Ω, R_{100} = 8,87 Ω

9. Une sonde thermique réalisée avec un fil de platine a à 20°C une résistance de 100 Ω. Sachant que le coefficient thermique du platine est de 0,0039 K^{-1}, Quelle sera la variation de la résistance pour une variation de température de 100°C ?

   Réponse : 39 Ω

10. Un fil bobiné dont la résistance est de 10 Ω à 0°C. Sachant que son coefficient de température est de 0,004 K^{-1}, à quelle température faut-il porter ce fil pour que sa résistance passe à 14 Ω ?

    Réponse : 100°C

11. La résistance d'un bobinage d'un moteur est de 120 Ω à 20°. Elle passe à 175 Ω lorsque le moteur est chaud. Quelle est alors la température interne du bobinage ? (α = 0,0038 K^{-1})

    Réponse : t = 141 °C

12. Le Nickel a un coefficient de température de 0,004 K^{-1}. A quelle température faut-il le chauffer pour qu'il atteigne une résistance double de celle à 0°C ?

    Réponse : 250 °C

12. Équation du premier degré

Objectifs

- Résoudre et vérifier une équation du premier degré.
- Apprendre à transformer une égalité pour en isoler un élément.

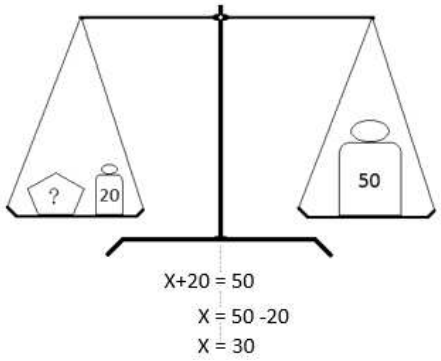
Qu'est-ce qu'une équation ?

Une équation est une égalité entre deux expressions algébriques.
On y trouve un signe égal placé entre les deux membres de l'équation, deux expressions algébriques dont l'une d'elles au moins contient une inconnue.
« Résoudre l'équation » consiste à chercher pour quelle valeur de l'inconnue cette égalité se vérifie.

Exemple : a) La valeur 7 vérifie l'équation $x + 5 = 12$
Car en remplaçant x par **7**, on obtient l'égalité $7 + 5 = 12$

b) De même 14 vérifie l'équation $2x - 4 = \frac{62-x}{2}$
Car en remplaçant x par 14 on vérifie que $2 \cdot \mathbf{14} - 4 = \frac{62-14}{2}$

Résolution des équations



Que pèse l'objet sur le plateau de gauche de cette balance ?

La balance montre qu'il y a équilibre entre le plateau de gauche et celui de droite, tout comme il y a une égalité entre les membres de gauche et de droite de l'équation.

Pour connaître la valeur inconnue, il faut retirer les 20 grammes en trop à gauche et faire de même à droite afin de conserver l'équilibre. X = 50-20

Toute opération faite à gauche (retrait de 20) doit être appliquée pareillement à droite.

La résolution d'une équation nécessite des transformations successives qui sont correctes tant que l'on veille à conserver l'égalité entre ce qu'il y a à gauche et à droite du signe égal.

Le but des transformations est d'obtenir des expressions de plus en plus simples et finalement la valeur de l'inconnue. X = 30

Résolvons les 2 équations suivantes en faisant (et en notant) des opérations faites de manière identique de part et d'autre du signe égal.

$2x - 5 = x + 3$

$2x - 5 + 5 = x + 3 + 5$ → "+5" pour simplifier le membre de gauche
$2x = x + 8$
$2x - x = x - x + 8$ → "-x" de part et d'autre
$\boxed{x = 8}$

$\frac{3x-15}{5} = 15$

$\frac{3x-15}{5} * 5 = 15 * 5$
$3x - 15 = 75$
$3x - 15 + 15 = 75 + 15$
$3x = 90$
$\frac{3x}{3} = \frac{90}{3}$
$\boxed{x = 30}$

Pour aller plus vite, on n'écrit plus les "– 5 + 5" ou les "$\frac{}{5} * 5$"

Tout ce passe comme si on faisait passer les nombres d'un côté à l'autre du signe égal en changeant les opérations que font ces nombres. En passant d'un côté à l'autre du signe égal, les moins deviennent des plus, les plus deviennent des moins, les divisions deviennent des multiplications et inversement les multiplications se transforment en divisions.

Exercices

	Équations	Solutions
1.	$x + 5 = 20$	$x = 15$
2.	$x - 10 = 30$	$x = 40$
3.	$2x + 5 = 25$	$x = 10$
4.	$-13x = 52$	$x = -4$
5.	$-x + 13 = 52$	$x = -39$
6.	$\frac{x}{2} + 3 = 10$	$x = 14$
7.	$x + 55 = 20$	$x = -35$
8.	$7 - x = 130$	$x = -123$
9.	$30 - \frac{x}{2} = 24$	$x = 12$
10.	$x - 6 = 2x + 8$	$x = -14$

	Équations	Solutions
11.	$x - 30 = \frac{x}{6}$	$x = 36$
12.	$\frac{x}{3} - 15 = -5$	$x = 30$
13.	$\frac{x+30}{2} = x + 7$	$x = 16$
14.	$\frac{x}{5} = x - 20$	$x = 25$
15.	$\frac{x}{2} - 4 = x - 15$	$x = 22$
16.	$\frac{x-4}{2} = \frac{2x-1}{5}$	$x = 18$
17.	$\frac{4x}{3} = 24$	$x = 18$
18.	$\frac{3}{4}x = 24$	$x = 32$
19.	$\frac{x}{6} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(x - 3)$	$x = 12$
20.	$\frac{x+6}{3} = \frac{x-4}{2} + 2$	$x = 12$

13. Transformations de formules

Savoir utiliser une formule c'est la connaître ou savoir la retrouver,
puis surtout, savoir la transformer en fonction de la valeur à calculer.

Introduction

Vous connaissez sans doute (ou vous retrouverez facilement) la formule pour calculer une vitesse à partir d'une distance et d'un temps. $v = \frac{d}{t}$

C'est une formule simple. Il suffit de savoir que la vitesse s'exprime en km/h, pour comprendre que la vitesse se calcule en divisant la distance comptée en km par la durée du trajet donnée en heures. La formule est inscrite dans les unités. « Kilomètre par heure » dit bien qu'on divise les km par des heures.

Si par contre vous connaissez la distance à parcourir et la vitesse à laquelle ce trajet sera fait, le calcul du temps nécessaire est moins immédiat. Pourtant la relation entre les trois grandeurs que sont le temps, la vitesse et la distance est toujours la même. Elle est donnée par la formule ***v = d / t*** sauf que cette fois c'est ***t*** que l'on cherche.

On va devoir **transformer la formule**.

$$v = \frac{d}{t} \quad \Rightarrow \quad v \cdot t = d \quad \Rightarrow \quad t = \frac{d}{v}$$

Vous pensiez connaître une formule. Mieux que cela, en connaissant la relation entre trois grandeurs vous avez trois formules sous la main. A condition bien entendu de savoir transformer les formules.

Une relation entre ***n*** grandeurs ↔ ***n*** formules.

Autre aspect de la question : Notre exemple concernait une vitesse exprimée en km/h. Il arrive que l'on change d'unités. Pour passer en mètres par seconde par exemple. Ou encore pour exprimer cette vitesse en unités anglo-saxonnes ou en nœuds marins. Les **changements d'unités** seront vus à la fin de ce chapitre.

Transformer une formule

Transformer une formule, c'est y isoler une lettre pour exprimer la valeur qu'elle représente en fonction d'un calcul sur les autres grandeurs.

Une formule est une équation.

C'est une **égalité** que l'on doit conserver tout au long de sa transformation.

Toute transformation faite sur un membre de l´équation doit être faite simultanément sur l'autre membre. Ou autrement dit, toute transformation faite d'un côté du signe égal doit être faite symétriquement de l'autre côté.

Termes et facteurs

Il n'y a en définitive dans une formule que deux types d'opérandes : des termes et des facteurs.

Les **termes** sont les opérandes des **additions** et des **soustractions**.
Remarquez que soustraire une valeur c'est ajouter la valeur opposée. x-2 = x + (-2)

L'addition et la soustraction sont des opérations inverses mais qui se ressemblent. Elles concernent les termes de l'opération.

Les **facteurs** sont les opérateurs de la **multiplication** ou de la **division**.
Ces deux opérations, tout en étant l'inverse l'une de l'autre, ne sont pas fondamentalement différentes. Diviser par une valeur c'est multiplier par son inverse : diviser par 2 c'est multiplier par ½ et réciproquement diviser par ½, c'est multiplier par 2.

La multiplication et la division sont des opérations semblables. Elles concernent les facteurs

Formules sous forme d'additions

Soit la formule . $a + b = c + d$
Nous allons la transformer pour isoler tour à tour chacune des 4 lettres.

a) Comment calculer $\boldsymbol{a}$?

La lettre a est à gauche du signe égal suivie de $+b$ qu'il faudrait retirer.

Retirer b du côté gauche, c'est l'en soustraire. $\boldsymbol{a} + b = c + d$

Il faut donc symétriquement retrancher b du côté droit $\boldsymbol{a} + b - b = c + d - b$

C'est comme si b avait été transporté de l'autre côté du signe égal $\boldsymbol{a} = c + d - b$

En passant d'un côté à l'autre le terme b a changé de signe

b) Calcul de $\boldsymbol{b}$

Cette fois c'est le terme a qu'il faut retrancher du membre de gauche pour n'y laisser que $\boldsymbol{b}$

$$a + \boldsymbol{b} = c + d$$
$$a + \boldsymbol{b} - a = c + d - a$$
$$\boldsymbol{b} = c + d - a$$

En passant d'un côté à l'autre du signe égal, le terme a a changé de signé

c) Le terme $\boldsymbol{c}$ est à droite du signe égal.

On peut permuter les deux membres puis procéder comme dans les deux premiers cas.

$$a + b = \boldsymbol{c} + d \quad \leftrightarrow \quad c + d = a + b \quad \rightarrow \quad c = a + b - d$$

Ou plus rapide encore, laisser c à droite et simplement déplacer d vers la gauche
Avoir une réponse avec c à droite du signe égal n'est pas dérangeant.

$$a + b = \boldsymbol{c} + d$$
$$a + b - d = \boldsymbol{c}$$

d) Idem pour rechercher la valeur de $\boldsymbol{d}$ $\quad a + b = c + \boldsymbol{d}$

$$a + b - c = \boldsymbol{d}$$

Règle générale : **En passant d'un côté à l'autre du signe égal les termes changent de signe.**

Formules sous formes de soustractions :

Puisque addition et soustraction sont des opérations semblables, le principe reste le même :

En passant d'un côté à l'autre du signe égal les termes changent de signe.

$$\boldsymbol{a} - b = c - d \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a} = c - d + b$$

$$a - \boldsymbol{b} = c - d \quad \Rightarrow \quad a - c + d = \boldsymbol{b} \quad \leftrightarrow \quad \boldsymbol{b} = a - c + d$$

$$a - b = \boldsymbol{c} - d \quad \Rightarrow \quad a - b + d = \boldsymbol{c} \quad \leftrightarrow \quad \boldsymbol{c} = a - b + d$$

$$a - b = c - \boldsymbol{d} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{d} = c - a + b$$

Formules sous forme de produits

Soit la relation de départ $a \cdot b = c \cdot d$

a) Comment calculer $\boldsymbol{a}$?

$$\boldsymbol{a} \cdot b = c \cdot d \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a} = \frac{c \cdot d}{b}$$

b qui multipliait à gauche du signe égal devient diviseur en passant du côté droit.

⇒ **En passant d'un côté à l'autre du signe égal, les facteurs s'inversent**

b) $a \cdot \boldsymbol{b} = c \cdot d \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{b} = \frac{c \cdot d}{a}$

c) $a \cdot b = \boldsymbol{c} \cdot d \quad \Rightarrow \quad \frac{a \cdot b}{d} = \boldsymbol{c} \quad \leftrightarrow \quad \boldsymbol{c} = \frac{a \,.\, b}{d}$

d) $a \cdot b = c \cdot \boldsymbol{d} \quad \Rightarrow \quad \frac{a \cdot b}{c} = \boldsymbol{d} \quad \leftrightarrow \quad \boldsymbol{d} = \frac{a \,.\, b}{c}$

Multiplications ou divisions, le principe reste le même :

En passant d'un côté à l'autre du signe égal les facteurs s'inversent.

Partons de la relation $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

a) $\frac{\boldsymbol{a}}{b} = \frac{c}{d} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a} = \frac{b \cdot c}{d}$

b qui divisait à gauche du signe égal devient multiplicateur en passant du côté droit.

b) $\frac{a}{\boldsymbol{b}} = \frac{c}{d} \quad \Rightarrow \quad \frac{a \cdot d}{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{b} \quad \leftrightarrow \quad \boldsymbol{b} = \frac{a \cdot d}{c}$

c) $\frac{a}{b} = \frac{\boldsymbol{c}}{d} \quad \Rightarrow \quad \frac{a \cdot d}{b} = \boldsymbol{c} \quad \leftrightarrow \quad \boldsymbol{c} = \frac{a \cdot d}{b}$

d) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{d} = \frac{b \cdot c}{a}$

Formules combinaisons de sommes et de produits

A chaque étape de la transformation, la question est de savoir si l'expression qui contient la lettre à isoler est une somme (+-) ou un produit (* /). D'où la règle à observer :

- Dans le cas d'une somme : en passant d'un coté à l'autre du signe égal les termes changent de signe.
- Dans le cas d'un produit : en passant d'un côté à l'autre du signe égal, les facteurs s'inversent.

Partons d'une formule de la forme $a + b \cdot c = \frac{d+e}{f}$

a = ? Comment transformer $a + b \cdot c = \frac{d+e}{f}$ pour trouver la valeur de $\boldsymbol{a}$

Le membre de l'équation qui contient la variable à isoler est une somme.

$$\boldsymbol{a} + b \cdot c = \frac{d+e}{f}$$

Pour l'isoler, il faut faire passer l'autre terme *(b.c)* de l'autre côté du signe égal.

$$\boldsymbol{a} = \frac{d+e}{f} - b \cdot c$$

b = ? Comment transformer $a + b \cdot c = \frac{d+e}{f}$ pour trouver la valeur de $\boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{b}$ est le facteur d'un produit qui est lui même le terme d'une somme.

$$a + \boldsymbol{b} \cdot c = \frac{d+e}{f}$$

Commençons par évacuer a le terme gênant de cette somme. Il change de signe. → $-a$

$$\boldsymbol{b} \cdot c = \frac{d+e}{f} - a$$

Le membre de gauche n'est plus maintenant qu'un produit. Le facteur gênant c est un multiplicateur. Il s'inverse et devient diviseur en passant à droite.

$$\boldsymbol{b} = \frac{1}{c} \cdot \left(\frac{d+e}{f} - a\right)$$

$\boldsymbol{f}$ = ? Comment transformer $a + b \cdot c = \frac{d+e}{f}$ pour trouver la valeur de $\boldsymbol{f}$

Le membre de l'équation qui contient la variable à isoler est un produit. C'est le produit de $(d+e)$ par $\frac{1}{\boldsymbol{f}}$.

$$a + b \cdot c = \frac{d+e}{\boldsymbol{f}}$$

Déplaçons $\boldsymbol{f}$ de l'autre côté pour le faire remonter.

$$\boldsymbol{f} \cdot (a + b.c) = d + e$$

Le membre de l'équation qui contient la variable à isoler est un produit. $\boldsymbol{f}$. *(a+b+c)*

Le facteur excédentaire *(a+b.c)* devient diviseur en s'inversant pour passer de l'autre côté du signe égal.

$$\boldsymbol{f} = \frac{d+e}{a+b.c}$$

e = ?

Comment transformer $a + b \cdot c = \frac{d+e}{f}$ pour trouver la valeur de **e ?**

Le membre de l'équation qui contient la variable à isoler est le produit de $(d + e)$ par $1/f$.

$$a + b \cdot c = \frac{d + e}{f}$$

Déplaçons le facteur excédentaire f de l'autre côté du signe égal. Il s'inverse.

Le membre de l'équation qui contient la variable à isoler est une somme $(d + e)$

$$f \cdot (a + b.c) = d + e$$

Le terme d change de signe en passant de l'autre côté du signe égal.

$$f \cdot (a + b.c) - d = e$$

On permute les deux membres de l'équation.

$$e = f \cdot (a + b.c) - d$$

Exercices

Calculs de périmètres, d'aires et de volumes

Circonférence $C = 2\,\pi\,R$

Rayon $R =$

Aire d'un carré $A = c^2$

Côté c =

Aire d'un rectangle $A = L\,.\,l$

Longueur $L =$

Largeur $l =$

Aire d'un cercle $A = \pi\,R^2$

Rayon $R =$

Sachant que $D = 2.R$ l'aire en fonction du diamètre $A =$

Aire d'un trapèze $A = \frac{(B+b)\cdot h}{2}$

Hauteur $h =$

Grande base $B =$

Volume d'un cube $V = c^3$

Côté du cube $c =$

Volume d'un cylindre $V = \pi\,R^2\,h$

Hauteur $h =$

Rayon $R =$

Volume d'une sphère $V = \frac{2}{3}\,\pi R^3$

Rayon $R =$

Diamètre $D =$

Formules d'électrotechnique

NB. Les unités sont données à titre indicatif

Loi d'Ohm

Intensité	$I = \frac{U}{R}$	$(1\ \mathrm{A} = 1\mathrm{V}/\Omega)$
Tension	$U =$	(V)
Résistance	$R =$	(Ω)

Puissance électrique

Puissance	$P = U\,.\,I$	$(1\ \mathrm{W} = 1\mathrm{V}\cdot\mathrm{A})$
Intensité	$I =$	(A)
Tension	$U =$	(V)

Quantité d'électricité

Quantité	$Q = I.t$	$(1\mathrm{C} = 1\mathrm{A}\cdot\mathrm{s})$
Intensité	$I =$	(A)
Temps	$t =$	(s)

Deux résistances en parallèle

Conductance équivalente	$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$	$(1\ \mathrm{S} = 1\ \Omega^{-1})$
Résistance équivalente	$R_e =$	(Ω)

Loi de Pouillet

Résistance	$R = \frac{\rho \cdot L}{S}$	$(1\ \Omega = \frac{1\ \frac{\Omega mm^2}{m} \cdot 1\ m}{1\ mm^2})$
Résistivité	$\rho =$	$\frac{\Omega\cdot\mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}}$
Longueur	L =	(m)
Section	S =	(mm^2)

Loi de Matthiessen

Variation de la résistance	$\Delta R = R_i \cdot \alpha \cdot \Delta t$	$(1\Omega = 1\Omega \cdot \mathrm{K}^{-1} \cdot \mathrm{K})$
Variation de température	$\Delta t =$	(K)
Coefficient de température	$\alpha =$	(K^{-1})
Résistance initiale	$R_i =$	(Ω)
$\Delta R = R_f - R_i \quad \Rightarrow$	$R_f - R_i = R_i \cdot \alpha \cdot \Delta t$	(Ω)
Résistance finale	$R_f =$	(Ω)

14. Éléments de trigonométrie

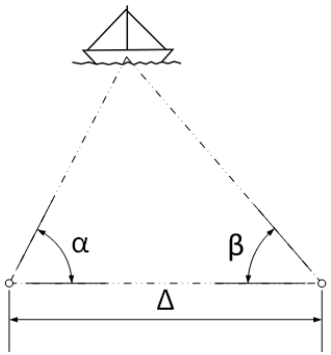
Les triangles

Le triangle est le plus simple des polygones puisqu'il est fait de trois points, les sommets du triangle reliés par trois segments que sont les côtés.

Les relations entre les mesures des angles et des côtés sont connues depuis longtemps (**Euclide**, **Pythagore**, …)

Il y a plus de 25 siècles, **Thalès** aurait déjà utilisé des techniques de triangulation pour calculer la distance d'un bateau en mer.

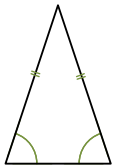
L'étude de ces relations fondamentales trouve une utilité pratique dans de nombreux domaines techniques : électricité, mécanique, construction, etc.



Classification des triangles

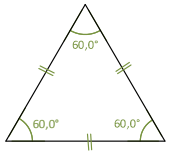
Triangle isocèle

Deux côtés égaux
Deux angles égaux



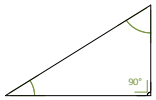
Triangle équilatéral

Trois côtés égaux
Trois angles égaux à 60°



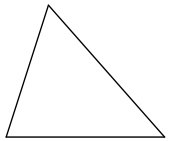
Triangle rectangle

Possède un angle droit.



Triangle quelconque ou scalène

Sans aucune caractéristique particulière.



Droites particulières

Hauteur : Segment de droite issu d'un sommet et perpendiculaire au sommet opposé.

Médiane : Segment de droite issu d'un sommet et qui aboutit au milieu du côté opposé.

Médiatrice : Droite passant par le milieu d'un côté et qui lui est perpendiculaire

Bissectrice : Demi droite issue d'un sommet et partageant l'angle en deux angles égaux.

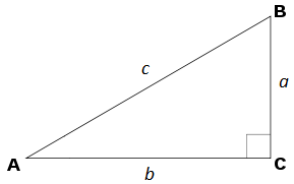
Propriétés des angles d'un triangle

La somme des angles d'un triangle vaut 180°

Le triangle rectangle

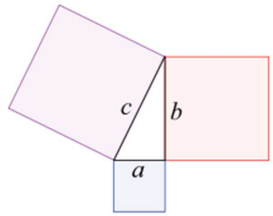
Il possède un angle droit. Les deux autres sont des angles complémentaires (somme = 90°)

Le côté le plus long est celui qui est opposé à l'angle droit. On l'appelle l'**hypoténuse**.



Théorème de Pythagore

Le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit.



Ou dit encore plus simplement :

Dans un triangle rectangle, le carré du grand côté est égal à la somme des carrés des petits côtés.

⇒ Dans un triangle rectangle, il suffit de connaître deux côtés pour pouvoir calculer la longueur du troisième.

Ce qui algébriquement peut s'écrire : $c^2 = a^2 + b^2$

ou encore : $a^2 = c^2 - b^2$ et $b^2 = c^2 - a^2$

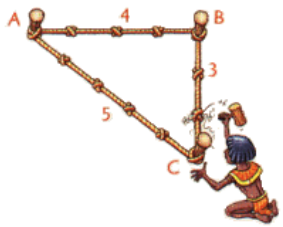
Et inversement …

Si dans un triangle, le carré du grand côté est égal à la somme des carrés des petits côtés, alors ce triangle est rectangle.

C'est la **réciproque** du théorème de Pythagore.

Une corde en guise d'équerre

On raconte que Pythagore a constaté cette particularité des triangles rectangles en observant les architectes égyptiens. Ces derniers utilisaient une **corde à treize nœuds**. Les nœuds espacés régulièrement divisaient la corde en 12 parties égales. En tendant cette corde entre trois points de sorte à avoir des segments de longueurs 3, 4 et 5, les petits côtés du triangle obtenu forment un angle droit.



Exercices

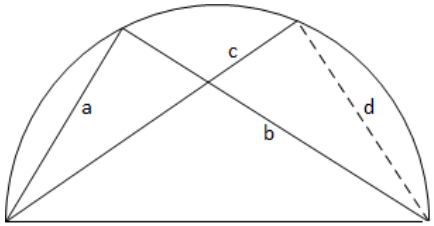
1. Le rectangle dont les côtés mesurent 5, 12 et 13 cm est-il rectangle ?

2. Même question pour les triangles dont les côtés mesurent :
   7, 9 et 11 m 6, 8 et 10 pouces

3. Sachant que les triangles inscrits dans un demi-cercle sont tous rectangles, calculer le rayon et la longueur du côté d

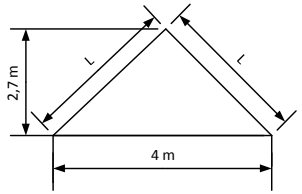
   On donne
   a = 40 mm
   b = 96 mm
   c = 81 mm

   Tracez cette figure après avoir calculé les valeurs demandées.

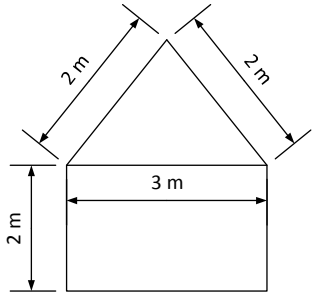


4. Une échelle de 6 m de long est appuyée contre un mur.
   Le bas de l'échelle est situé à 75 cm du mur. Calculer la hauteur du mur qui peut être atteinte

5. Le dessin ci-contre montre une partie du pignon d'une maison.
   Rechercher la valeur de L au millimètre près.



6. Calculer au centimètre près la hauteur de cette construction



7. Que disait Pythagore quand il allait promener son chien ?

Médor, va chercher Thalès

Les fonctions trigonométriques

Objectif

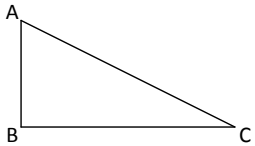
Mise en pratique des fonctions de base de la trigonométrie pour retrouver toutes les dimensions d'un triangle rectangle à partir d'uniquement deux informations :

- un angle et la longueur d'un côté
- ou les longueurs de deux côtés.

L'objectif de ce cours est autrement dit d'apprendre l'usage des fonctions sin, cos et tan de nos calculatrices ainsi que les fonctions inverses ($\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ et $\tan^{-1}$ ou asin, acos, atan selon les calculatrices).

Les angles du triangle rectangle

Un triangle rectangle est par définition un triangle dont un angle est droit (90°)
Puisque la somme des angles de tout triangle vaut 180°, la somme des deux angles aigus d'un triangle rectangle vaut 90°.



$\hat{A} + \hat{B} = 90°$

Dimensions d'un triangle rectangle

Les dimensions mesurables d'un triangle rectangle sont les longueurs des trois côtés ainsi que les angles. Connaître la longueur d'un côté et la mesure d'un angle aigu ou la longueur d'un autre côté suffit pour pouvoir retrouver toutes les autres mesures.

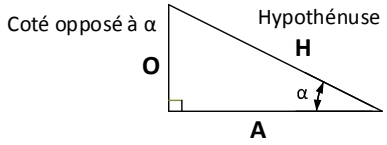
SOH CAH TOA

Il s'agit d'un moyen mnémotechnique pour mémoriser les définitions des fonctions sinus "sin", cosinus "cos" et tangente "tan"

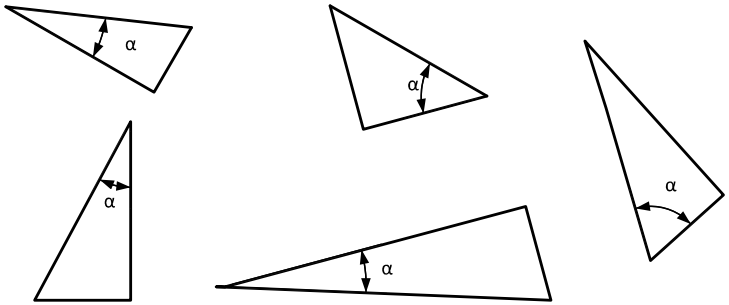
SOH CAH TOA

Donnons un nom à chacun des côtés du triangle en prenant comme référence un des angles aigus.

Nous appelons
- H : le grand côté ou hypoténuse
- O : le côté opposé à l'angle considéré
- A : le côté adjacent à cet angle.



Exercez-vous à nommer les côtés d'un triangle rectangle par ces lettres **H**, **A** et **O** quelle que soit la manière dont est disposé le triangle et quel que soit l'angle aigu pris comme référence.



Trois formules à retenir

SOH $\quad sin\ \alpha = \frac{Côté\ opposé}{Hypothénuse}$

CAH $\quad cos\ \alpha = \frac{Côté\ adjacent}{Hypothénuse}$

TOA $\quad tan\ \alpha = \frac{Côté\ opposé}{Côté\ adjacent}$

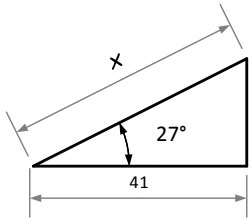
Connaissant un angle et un côté, calculer la longueur d'un autre côté

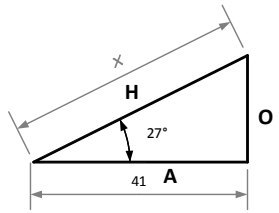
Méthode : 1° Nommer les côtés par rapport à l'angle connu (**A** , **0** et **H**)

2° Entourer le nom du côté que l'on connait et celui que l'on cherche

3° Choisir la formule qui contient ces deux lettres

Exemple :





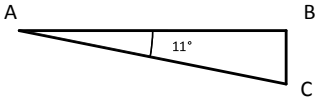
$\Rightarrow$ CAH $\quad cos\ \alpha = \frac{Côté\ adjacent}{Hypothénuse}$

$\cos 27° = \frac{41}{x}$ Transformons cette formule pour calculer x

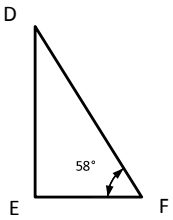
$x = \frac{41}{\cos 27°}$ … et la calculatrice donne 46 (en arrondissant)

Exercices

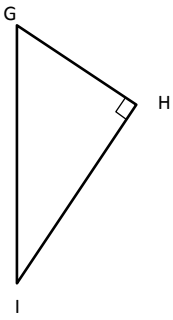
1) AB = 170 cm et l'angle A est de 11°
Que vaut AC ?



2) EF = 20 mm et l'angle F est de 58°
Calculer la longueur de DE



3) L'angle G = 56°, sachant l'hypoténuse mesure 64 cm, que vaut GH ?

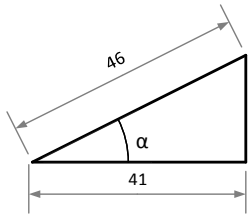


Connaissant les longueurs de deux côtés, calculer la valeur d'un angle

La méthode de résolution est fort semblable :

1° Repérer les côtés par rapport à l'angle à rechercher (**A**, **0** et **H**)
2° Entourer les noms des côtés que l'on connait
3° Choisir la formule qui content ces deux lettres

Exemple : Connaissant deux des côtés de ce triangle déterminez la mesure de l'angle alpha ?

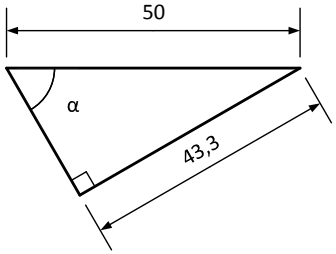


⇨ $\cos\alpha = \frac{41}{46}$ ⇒ $\alpha = \text{acos}\frac{41}{46} = 27°$

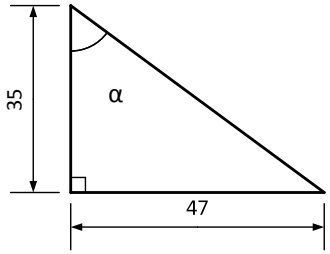
acos = «arc cos » = l'angle dont le cos = 41/46

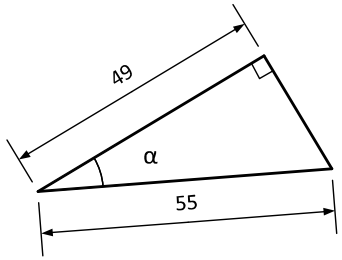
Exercices

Quel est le rapport trigonométrique qui lie les longueurs connues des côtés à l'angle alpha ?
Que vaut l'angle α ?



Mêmes questions pour les figures suivantes :





15. Disjoncteur magnétothermique

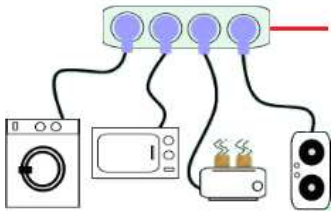
Le disjoncteur magnétothermique protège les lignes contre les surcharges et les courts-circuits, deux anomalies qui conduisent à la destruction des conducteurs et risquent de provoquer des incendies.

Surcharge

Il y a surcharge lorsque l'intensité électrique dépasse ce que peut supporter le circuit.

Quel est en principe le courant admissible sur une ligne de 2,5 mm² de section ?

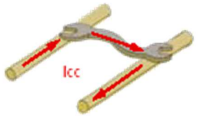
Quel sera le courant absorbé lorsque le séchoir (2000 W), le four micro-onde (1000 W, le grille-pain (800 W) et les plaques du réchaud (2000 W) fonctionnent simultanément ?



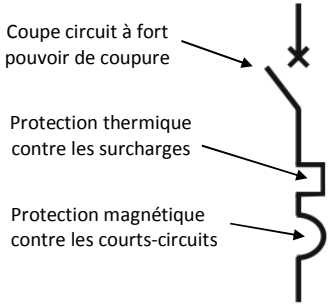
Court-circuit

Un court-circuit est un contact accidentel entre deux conducteurs soumis à des potentiels différents.

À défaut d'une protection suffisamment rapide cela produit la destruction des conducteurs.



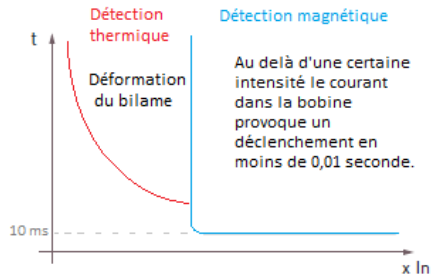
Le disjoncteur magnétothermique



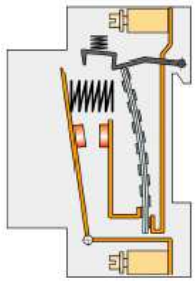
Il s'agit d'un disjoncteur, contrairement à un simple interrupteur ou à un sectionneur, c'est un dispositif à fort pouvoir de coupure.

L'élément de déclenchement thermique provoque la coupure en cas de surcharge.

L'élément électromagnétique est capable de réagir à un court-circuit en un centième de seconde.



L'élément thermique



La protection thermique est réalisée à l'aide d'un bilame. Ce dispositif est constitué de deux lames métalliques accolées dont l'une des extrémités est fixe tandis que l'autre en se déplaçant peut agir sur le système de déclenchement. L'une de ces lames à un coefficient de dilatation thermique presque nul tandis que l'autre à un coefficient de dilatation important. L'échauffement dû à l'effet Joule déforme et provoque le mouvement à ce mécanisme.

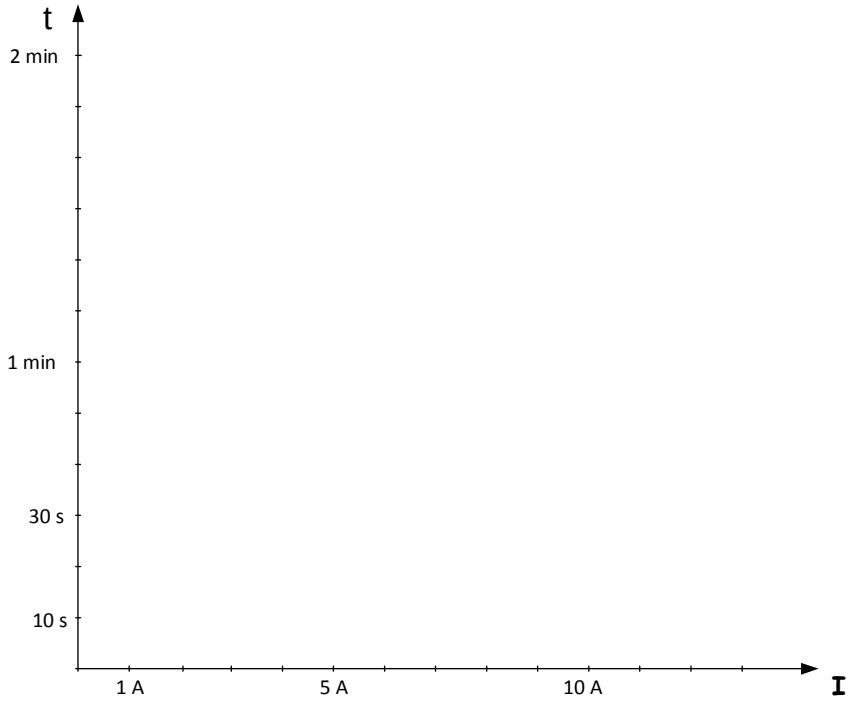
Courbe de déclenchement thermique.

La déformation du bilame est progressive. La vitesse de la déformation est proportionnelle à l'intensité de la surcharge.

Imaginez un bilame qui déclencherait avec une énergie de 23.000 J

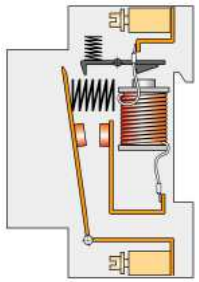
Représentez ci-dessous la courbe de déclenchement de ce dispositif. (U=230 V)

I (A)	1 A	2 A	5 A	10 A	20 A
t (s)					



La courbe est une hyperbole. La durée t est inversement proportionnelle à l'intensité.

L'élément magnétique



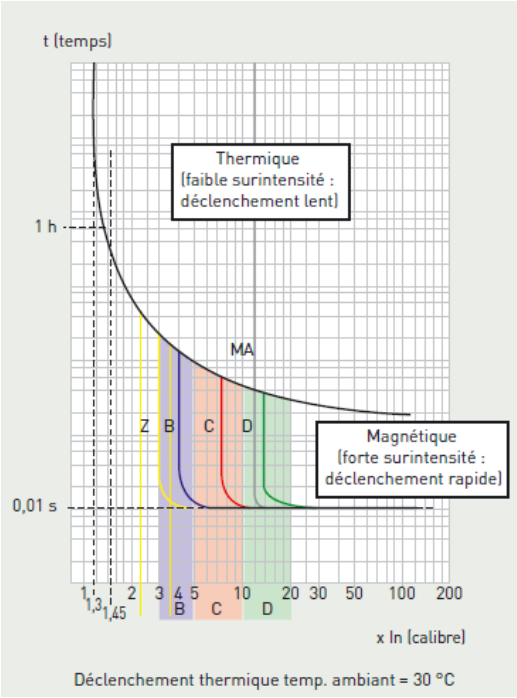
La forte intensité du courant de court-circuit provoque l'action rapide de l'électro-aimant.

L'intensité de déclenchement magnétique est l'intensité minimum qui provoque la coupure en un temps inférieur à 10 ms.

Courbes de déclenchement des disjoncteurs

L'intensité est représentée sur l'axe horizontal par une échelle logarithmique de sorte à pouvoir indiquer à la fois les intensités des surcharges faibles et celles des courts-circuits de plusieurs milliers d'ampères.

L'axe vertical a lui aussi une échelle logarithmique pour pouvoir y marquer simultanément des durées allant de l'ordre du centième de seconde à une heure.



Pour le choix du disjoncteur, outre la tension et l'intensité nominale, on choisit la vitesse de déclenchement du dispositif magnétique :

• **Courbe B** : lorsqu'il est nécessaire de réagir aux courts-circuits de faible valeur.
(Lorsque par exemple la ligne est longue et que sa résistance non négligeable limite le courant).

• **Courbe C** : c'est le choix plus habituel. Il couvre une très grande majorité des besoins.

• **Courbe D** : à utiliser pour la protection des circuits ayant de très fortes pointes de courant à la mise sous tension.
(Exemple : transformateurs dont les points d'intensité peuvent atteindre 20 In, ballast électronique…).

16. Solutions des exercices

Chap 3 Fractions

6) Rendre les fractions irréductibles

2/5	3/4	5/11	21/32
1/6	12/11	8/27	9/11
6/7	19/22	7/11	53/84

7) Calculer

23/4	23/24	29/15	13/18
11/5	11/20	5/2	15/2
20/3	5/3	2/5	1
4/3	5/48	1/21	1/24

10) Simplifier au maximum

-4 7/4 3 ¾ -1/2 -3 2 1/4

Chap 6 Couplage de résistances en parallèle

1) 2 Ω
2) 17 Ω
3) 5 Ω, 8 Ω, 10 Ω, 12 Ω, 12 Ω, 12 Ω, 18 Ω, 40 Ω, 18 Ω, 16 Ω, 25 Ω
4) a. 12/100 = 0,12 A 12/200 = 0,06 A 12/300 = 0,04 A
   b. I_{totale} = 0,22 A
   c. $\frac{1}{R_e} = \frac{1}{100} + \frac{1}{200} + \frac{1}{300} = \frac{6+3+2}{600} = \frac{11}{600} \Rightarrow R_e = 54{,}54$ V
   d. Vérification : $U = R_e * I = 54{,}54\ \Omega \times 0{,}22$ A = 12 V
5) *Données :* R1 = 30 Ω R2 = 45 Ω R3 = 90 Ω
   I1 = 3 A
   Inconnues : U I2 I3 Re
   Solution : $U = R_3 \times I_3 = 90$ V
   $I_2 = U/R_2 = 90\text{ V} / 45\ \Omega = 2$ A $I_3 = U/R_3 = 1$ A
   $R_e = U / I_{total} = 90\text{V} / (3+2+1) = 15\ \Omega$
6) $R_1 = 8\ \Omega$ $R2 = 12\ \Omega \Rightarrow R_{12} = \frac{8 \times 12}{8+12} = 4{,}8\ \Omega$
   $I = 2$ A $\Rightarrow U = R_e \times I = 9{,}6\ V$
   En ajoutant R_3 I passe de 2 à 3,2 A $\Rightarrow$ $I_3 = 1{,}2$ A
   $R_3 = U / I_3 = 8\ \Omega$
7) $R_e = 1{,}6\ \Omega$ U = 19,2 V $I_1 = 6{,}4$ A $I_2 = 3{,}2$ A $I_3 = 2{,}4$ A
8) $R_4 = 12\ \Omega$
9) a. 15 V et 45 V
   b. I = 0,075 + 0,025 = 1 A