Numération

Système de numération

Un système de numération est un ensemble de conventions pour former les nombres, les dire, les écrire et calculer.

Les nombres s'énoncent

- soit par des mots simples (un nombre = 1 mot)
  Exemples : un, deux, trois, …, neuf, dix, onze, douze, …, seize, vingt, trente, cent, mille
- soit par une combinaison de mots nombres liés entre eux par des opérations arithmétiques telles que l'addition et la multiplication : dix-sept, quatre-vingt

Comment former les nombres pour compter plus loin ?

Pour compter, nous dénombrons une à une les unités. Quand elles sont en trop grand nombre, nous regroupons les unités pour former un ensemble auquel on donne un nom et que l'on met sur le côté pour compter les unités suivantes jusqu'à ce qu'on puisse les regrouper dans une autre ensemble de même taille. Les regroupements d'unités sont à leur tour regroupés en nouveaux ensembles qui portent un autre nom encore.

Exemples :

- En parlant de temps : 60 sec = 1 min, 60 min = 1h, 24h = 1 jour
- Pour mesurer des angles : 60" = 1', 60' = 1° et il faut 360° pour faire un tour.

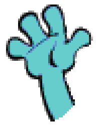
  Remarquez que les ensembles successifs ne doivent pas nécessairement être formés de quantités toujours identiques de sous ensembles. On comprend les raisons pratiques qui font que les heures se comptent par 12 ou 24 et non plus par 60, comme on le faisait pour les minutes et les secondes.
- Plus alambiqué encore (sauf pour nos voisins d'outre-manche) :
  1 Pouce = 2,54 cm, 1 Pied = 12 Pouces, 1 Yard = 3 Pieds, 1 Mile = 1760 Yards
- On comprend mieux : 1000 gr =1 kg, 1000 kg = 1T

Dans la vie courante, et de notre côté de l'occident, on essaie de compter par dizaines, centaines, milliers et autres puissances successives de 10. Autrement dit, nous essayons de n'utiliser qu'une seule base : la base 10 encore appelée le système décimal. Mais ce ne s'est pas toujours passé comme cela et dans d'autres civilisations ou pour d'autres usages il arrive que l'on recoure à d'autres bases de numération.

Les bases de numération

Une base de numération est un nombre dont on utilise les puissances successives pour former d'autres nombres plus importants.

Ainsi, en base 10, les puissances successives sont UN ($1=10^0$), DIX ($10 = 10^1$), CENT ($100 = 10^2$), MILLE ($1000 = 10^3$), DIX MILLE ($10.000 = 10^4$) etc.



Le système décimal est le plus commun. Le choix de cette base n'est certainement pas indépendant du fait que nous ayons 10 doigts pour compter. Probablement que nous compterions en base 8 si nous étions des schtroumpfs

Il existe donc différentes bases de comptage[1] :

Base 60	Système sexagésimal utilisé en Mésopotamie. Il nous en reste 60 minutes, 60 secondes. Le nombre 60 a de nombreux diviseurs : 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 30.
Base 20	Le système vigésimal aurait été utilisé par nos ancêtres gaulois et était commun au moyen âge, il nous reste le "quatre-vingts". Quatre-vingt-dix, Soixante quinze se base sur des multiples de 20.
Base 12	Système duodécimal pour compter les mois, les heures et les œufs par douzaines
Base 10	Celle que nous utilisons tous les jours (maintenant que nous portons des chaussures et que nous ne pouvons plus compter aussi sur nos orteils)
Base 5	Système quinaire que l'on retrouve partiellement dans la numération romaine et pour les calculs avec certains Japonais (système biquinaire)
Base 2	Incontournable en informatique. Sans elle ce cours n'aurait pas lieu.
Base 16	Ressemble fort au binaire = notation plus concise pour nous « humain »
Base 8	Très en vogue aux débuts de la micro informatique

[1] Tous les nombres, sauf zéro, pourraient servir de base, y compris les nombres fractionnaires et les nombres irrationnels. Mais cela nous éloignerait du but de ce cours. Ceux qui seraient intéressés par la numération en base π (par exemple) trouverons certainement sur Internet de quoi satisfaire leur curiosité mais cette recherche tiendrait je pense, pour les lecteurs auxquels ce cours est destiné, plus du délire que de la récréation mathématique.

Ecriture des nombres

Considérons le nombre 1975.

Un nombre est un "mot" dont les caractères sont des chiffres.

1975 est un nombre de quatre chiffres. Le dernier chiffre représente les unités et, puisque nous sommes en base 10, l'avant-dernier représente les dizaines, le précédent : les centaines puis viennent les milliers et ainsi de suite. Nous appellerons cette façon d'écrire les nombres la numération de position et pour justifier l'intérêt de ce type de notation je vous propose de démontrer l'inconvenance d'une numération qui ne reposerait pas sur ce principe.

On sait que les romains employaient eux-aussi le système décimal, la base 10, mais ils écrivaient leurs nombres différemment :

Voici comment s'écrit 1975 en chiffres romains : MCMLXXV

Cette écriture, plus compliquée, mais encore utilisée dans certaines circonstances se prête mal aux calculs écrits. Essayez donc de faire par écrit MMX moins MCMLXXV !

Pour les romains, mille, cent, dix et un ne pouvaient que s'écrire avec des signes différents car, sans le principe de la numération de position, ils ne pouvaient imaginer attribuer à leur chiffres des valeurs qui fluctuent selon leur position dans le nombre.

Ajoutez à cela le fait qu'ils ne connaissaient pas non plus le chiffre zéro. Ils n'avaient vraiment pas la chance que nous avons maintenant d'être familiarisés depuis notre plus tendre enfance à ces notions qui étonnamment n'ont été connues en occident qu'à partir du XII^{e} siècle alors que le mathématicien arabe Al-Khwārizmī, utilisait déjà le chiffre zéro au VIII^{e} siècle et qu'il était connue en Inde et probablement en chine bien avant encore.

La numération de position combinée à l'utilisation du chiffre zéro[2] nous permet de représenter les nombre de manière bien plus efficace et facilite grandement les opérations arithmétiques.

[2] Une numération de position est possible sans l'utilisation du zéro. Cette notation étrange n'a aucun intérêt pour la suite de ce cours mais elle intéressera ceux qui (et j'espère qu'il y en a encore) sont curieux. C'est à ceux-là que je dédie cette note en bas de page en leur proposant de suivre ce lien :
http://irem.u-strasbg.fr/php/articles/37_Lefort.pdf

Numération de position

Revenons au nombre 1975 (écrit de manière habituelle cette fois)

La valeur que l'on attribue à chaque chiffre dépend donc

- du chiffre en lui-même (de sa valeur intrinsèque)
- ET de sa position

Dans cet exemple le 5 vaut 5 unités = 5 x 1.
le 7 représente des dizaines, il vaut 7 x 10.
le 9 qui suit représente des centaines, il vaut 9 x 100.
le 1 vaut 1 x 1000.

Nous formons donc les nombres à l'aide d'une notation où la position est très importante.

Le chiffre le plus à droite représente des unités. En décimal, les chiffres suivants représentent les dizaines, puis les centaines etc. Nous numéroterons les positions en allant de droite à gauche. Ainsi les unités auront toujours la même et première position, la position 0, quelle que soit la taille du nombre.

3	2	1	0
1	9	7	5

La règle qui permet de déterminer le poids d'un chiffre est la suivante :

$$\text{Poids d'un chiffre} = \text{base}^{\text{position}}$$

Voici ce que cela donne pour le nombre 1975 en décimal (Base 10) :

Le poids du chiffre 5 est 10^0 , sa valeur est 5 x 1 (car $10^0 = 1$)

Le poids du chiffre 7 est 10^1 , sa valeur est 7 x 10 = 70

Le poids du chiffre 9 est 10^2 , sa valeur est 9 x 10^2 = 9 x 100 = 900

Le poids du chiffre 1 est 10^3 , sa valeur est 1 x 10^3 = 1 x 1000 = 1000

Position	3	2	1	0
Chiffre	1	9	7	5
$\text{Base}^{\text{Position}}$ = poids	$10^3 = 1000$	$10^2 = 100$	$10^1 = 10$	$10^0 = 1$
Valeurs de chaque chiffre	1000	900	70	5

$$1975 = 1 \text{x} 10^3 + 9 \text{x} 10^2 + 7 \text{x} 10^1 + 5 \text{x} 10^0$$

La valeur d'un chiffre est donc le produit de sa valeur intrinsèque et de son poids.

*D'une manière plus théorique, on peut dire que la valeur d'un nombre **N** représenté par **n** chiffres en base **B** est la valeur numérique d'un polynôme du n-1ième degré où **B** est la base et dont les coefficients sont entiers et inférieurs à **B***

$$N = c_{n-1}\, B^{n-1} + \ldots + c_i\, B^i + \ldots + c_2\, B^2 + c_1\, B + c_0$$

$$= \sum_{i=0}^{i=n-1} c_i\, B^i$$

Exemple : En base 10, B=10 et les coefficients Cn-1, Cn-2, ... Ci, ..., C1, C0 ont tous une valeur inférieure à 10. La suite de ces coefficients $c_{n-1}\ c_{n-2} \ldots c_1\ c_0$ *n'est autre que la suite des chiffres qui forment le nombre.*

Mais, trêve de théories, revenons aux règles essentielles qu'implique ce qui a été vu jusqu'ici :

- Désormais, nous utilisons des numérations de position quelle que soit la base.
- Le chiffre le plus à droite représente toujours les unités
- Les positions des chiffres se comptent de droite à gauche
- La position du premier chiffre (celui de droite donc !) est notée Zéro
- Le second chiffre quand il vaut 1 représente exactement la valeur de la base quelle que soit cette base.
- Ajouter un zéro à droite d'un nombre revient à multiplier ce nombre par sa base.

EXERCICES SUR LES NOMBRES ENTIERS EN BASE 10

1. On écrit un zéro à droite d'un nombre entier, de combien de fois sa valeur augmente-t-il ?
2. Combien y a-t-il de nombres entiers de deux, trois, quatre … chiffres ?
3. Si on écrit les zéros non significatifs
4. Si on n'écrit pas les zéros non significatifs
5. Quel est le plus grand nombre exprimé par quatre chiffres significatifs ?
6. Quel est le plus petit nombre exprimé par quatre chiffres significatifs.
7. De combien le plus petit nombre de trois chiffres dépasse-t-il le plus grand nombre de deux chiffres ?
    a) Quel est le plus petit nombre exprimé par cinq chiffres significatifs différents ?
    b) Quel est le plus grand nombre exprimé par cinq chiffres significatifs différents ?
8. Avec les chiffres 1, 2 et 3 former le maximum de nombres différents où chaque chiffre n'apparaît qu'une seule fois. Classer ces nombres par ordre croissant.
9. Même question avec les chiffres 1, 2, 3 et 4
10. Un livre possède 1000 pages, combien de fois a-t-on employé le caractère 0 pour numéroter ces pages ?