Addition et soustraction de deux octets

Rappelons qu'un octet est un code de 8 bits.
On peut avec 8 bits représenter 2^8 soit 256 combinaisons différentes.
Ces combinaisons varient 0000 0000 à 1111 1111 si on les écrit en binaire ou de 00 à FF si on les écrit en hexadécimal.

La signification de ces codes ne concerne absolument pas l'ordinateur. La machine est conçue pour traiter des informations ou plus exactement l'aspect formel de cette information et non pas l'information en tant que telle, sa signification, son contenu sémantique. Contrairement à nous humains et à une vision simpliste que nous pourrions avoir de l'informatique, la machine est incapable de saisir le sens de l'information traitée. Elle traite des codes sans avoir aucune idée des valeurs que représentent ces codes.

Le traitement automatique de l'information (de son codage) n'a d'intérêt que si les codes produits par ce traitement ont bien à leur tour des significations correctes. La question essentielle est donc de savoir quelles informations peuvent valablement être représentées par un codage déterminé.

Prenons l'exemple d'un octet.
Quelles sont les valeurs que peuvent représenter les diverses combinaisons possibles avec 8 bits ? La réponse dépend de la convention adoptée par celui qui utilise ces codes :

- Si pour nous, ces codes représentent des **nombres non-signés**, les 256 valeurs qui peuvent être représentées par un octet vont **de 0 à 256** (00_{16} à FF_{16})

- Si par contre, nous considérons ces codes comme représentant des **nombres signés**, les 256 valeurs possibles vont **de -128 à +127** (80_{16} à $7F_{16}$)

Les opérations arithmétiques faites à partir de ces codes donnent des résultats corrects pour autant que les codes produits ne sortent pas des limites qui dépendent du codage choisi : la taille du nombre 8, 16, 32 ou 64 bits et le fait que ces nombres soient considérés comme signés ou non. En dehors de ces limites les codes produits ne correspondent plus à des valeurs correctes.

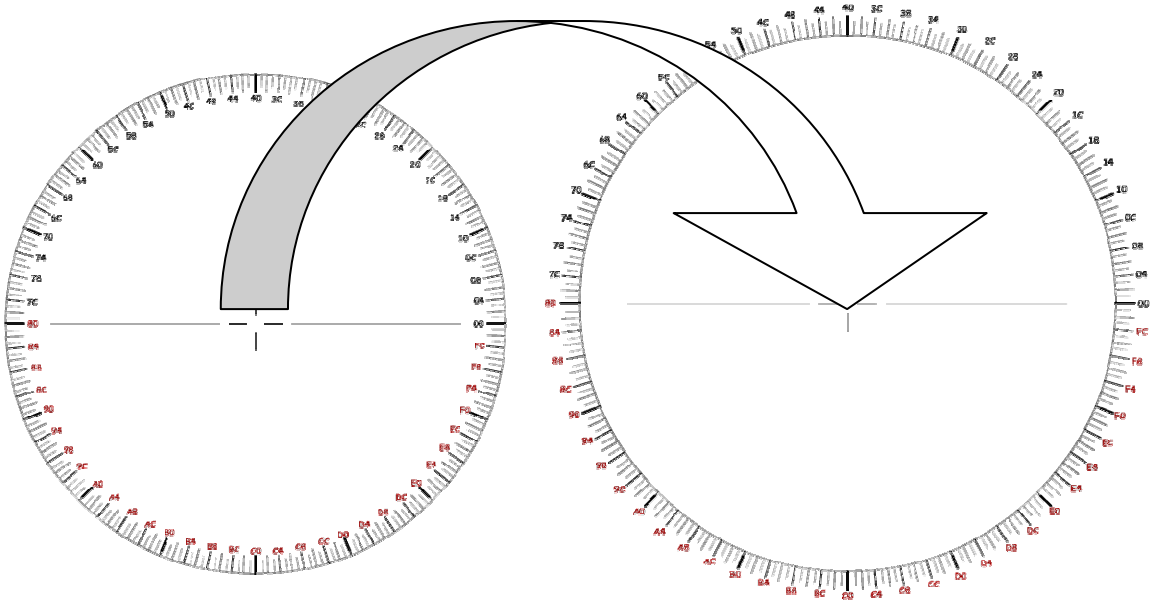
Exemple :
Imaginons le calcul donné ici en hexadécimal : C0 + 2C
En binaire, cela s'écrirait 1100 0000 + 0010 1100
Le résultat sera EC en base 16 ou ce qui revient au même 1110 1100 en binaire

Voyons maintenant si les codes produits correspondent à des réponses valables.

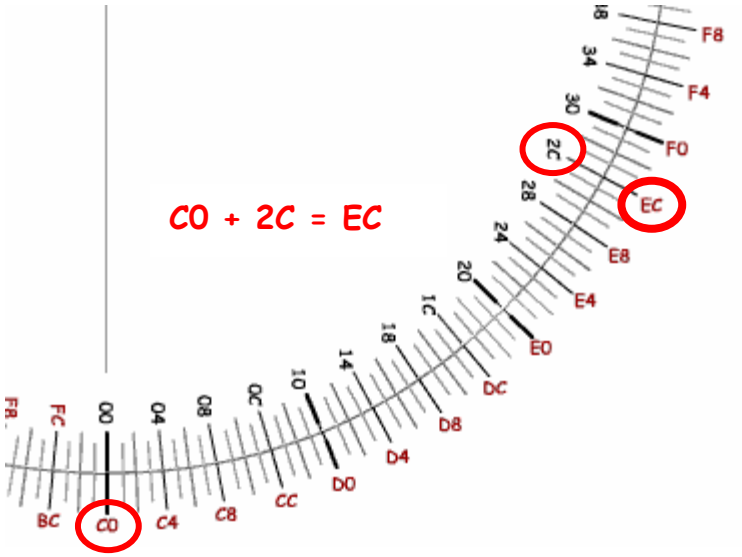
1° Si ces codes représentent des **nombres non signés :**
Leurs valeurs sont donc comprises entre 0 et 255
$C0_{16}$ ou $1100\ 0000_2$ représente la valeur 192 écrite ici en décimal
$2C_{16}$ ou $0010\ 1100_2$ représente la valeur 44 en décimal
Le résultat EC_{16} représente 236 cela correspond bien à la valeur 192 + 44
Le résultat est correct car nous sommes restés dans les limites des nombres non signés.
Nous ne sommes pas passés sous la valeur zéro. Il est d'ailleurs impossible d'écrire des nombres négatifs avec des nombres non signés !
Nous n'avons pas non plus dépassé la valeur maximum de 255.

2° Si ces codes représentent des **nombres signés** :
Leurs valeurs sont donc comprises entre -128 et + 127
$C0_{16}$ ou 1100 0000_2 représente la valeur négative -64
$2C_{16}$ ou 0010 1100_2 représente la valeur positive +44
Le résultat ED_{16} représente -20 cela correspond bien à la valeur de (-64) + (+44)
Le résultat est correct car nous sommes restés dans les limites des nombres non signés
Nous ne sommes pas passés sous la valeur de -128
Nous n'avons pas non plus dépassé la valeur maximum de + 127

Voyons comment de tels calculs peuvent être réalisés de manière automatique par un dispositif qui pourtant ignore la signification c'est-à-dire la valeur des codes qu'il traite.
Le dispositif en question sera une calculatrice hexadécimale réalisée en papier. Elle est constituée de deux disques concentriques dessinés dans les pages annexes.
Ces disques sont gradués avec les 256 codes allant de 00 à FF.
Le disque intérieur sera découpé et fixé avec une punaise au centre du disque extérieur.



L'opération précédente **C0 + 2C** peut maintenant être réalisée en faisant pivoter le disque intérieur de sorte à placer l'origine de son origine la graduation (00) en face de l'inscription C0 sur le disque extérieur. Cherchons maintenant la valeur 2D à additionner sur le disque intérieur. La somme **EC** lui fait face sur le disque externe.



Ce calcul C0 + 2C = EC donne un résultat correct quelle que soit la convention utilisée (nombres non-signés ou au contraire signés) car ni dans un cas ni dans l'autre nous n'avons franchi les valeurs limites que peuvent représenter ces codes de 8 bits

Nombres non signés : 192 + 44 = 236 et 236 ∈ [0 ; 255]
Nombres signés : - 64 + 44 = 20 et 20 ∈ [-128 ; +127]

Il n'en sera pas de même si l'on dépasse l'une des limites liées à la convention utilisée (nombres signés ou non signés)

- Ainsi si on voulait représenter deux nombres 120 et 40 par un <u>code signé d'un seul octet</u> .

Ces deux nombres peuvent sans problèmes être représentés par un octet signé puisqu'ils sont compris entre les valeurs limites -128 et + 127. **+120 =** $\mathbf{78}_{16}$ et **+40 =** $\mathbf{28}_{16}$

Par contre, leur somme 120 + 40 vaudra 160 ce qui est une valeur supérieure à +127

La valeur 160 ne peut donc pas être représentée de manière valable par un code signé d'un seul octet ! Ce dépassement sera signalée par un flag particulier du processeur : l'**Overflow**

Le flag Overflow indique que la capacité des nombres signés a été dépassée par ce calcul.

On aurait donc du utiliser des nombres d'au moins 2 octets pour faire des calculs valides avec de telles valeurs. $0078_{16} + 0028_{16} = 00A0_{16} = 160_{10}$

- Imaginons maintenant que l'on veuille additionner 250 + 16 avec des nombres non signés d'un seul octet.

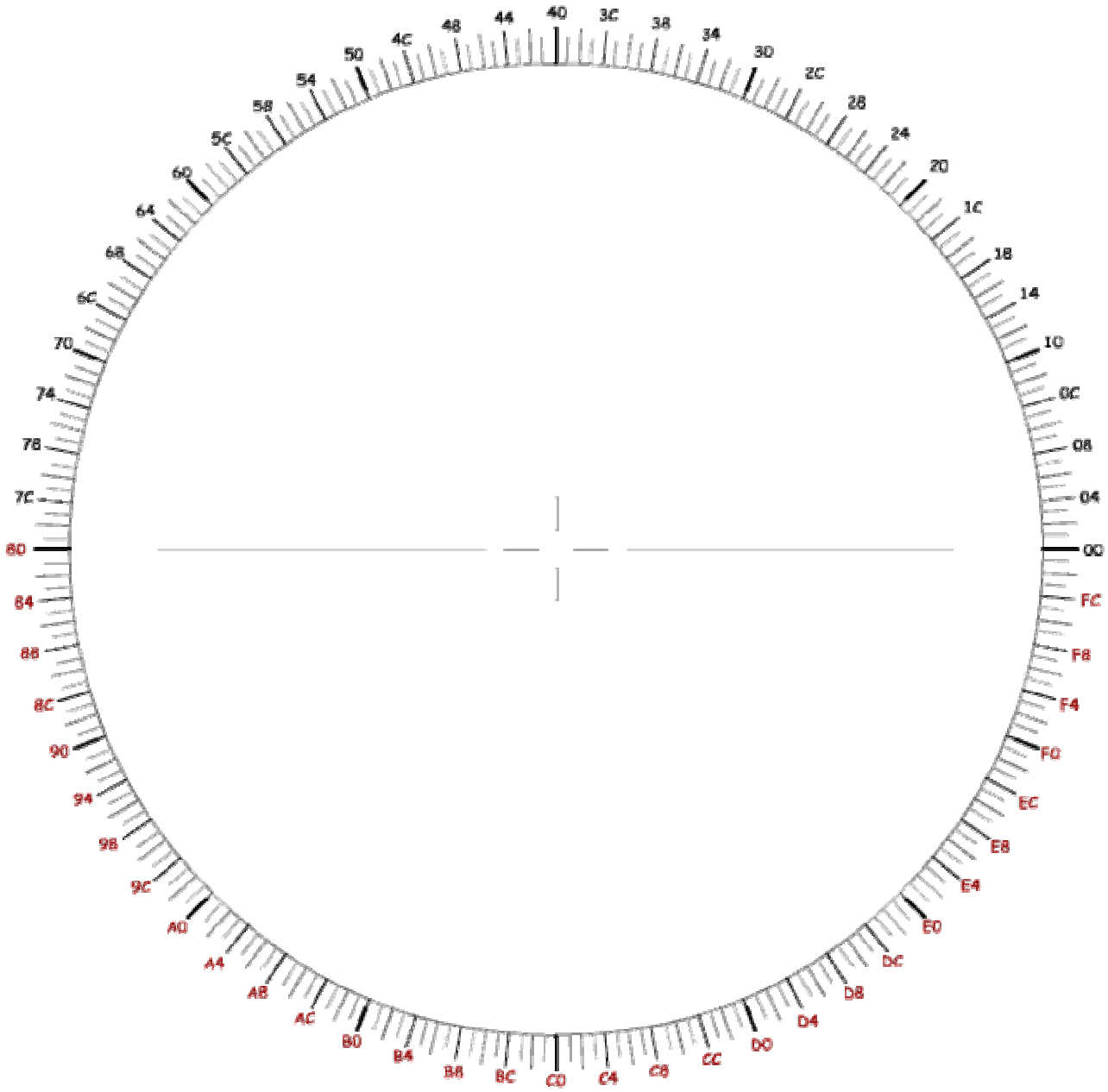
Bien que, comme dans le cas précédent, les deux nombres de départ peuvent sans problème être représentés par un seul octet ($250 = FA_{16}$) et ($16 = 10_{16}$) ; le résultat que donnerait notre calculatrice en papier ou n'importe quel microprocesseur sera $0A_{16} = 10$ en décimal.
Pourtant $250 + 16 \neq 10$! L'erreur est due au fait que le résultat qu'on aurait dû obtenir 266 dépasse la valeur limite (256) possible avec un nombre non signé d'un seul octet.

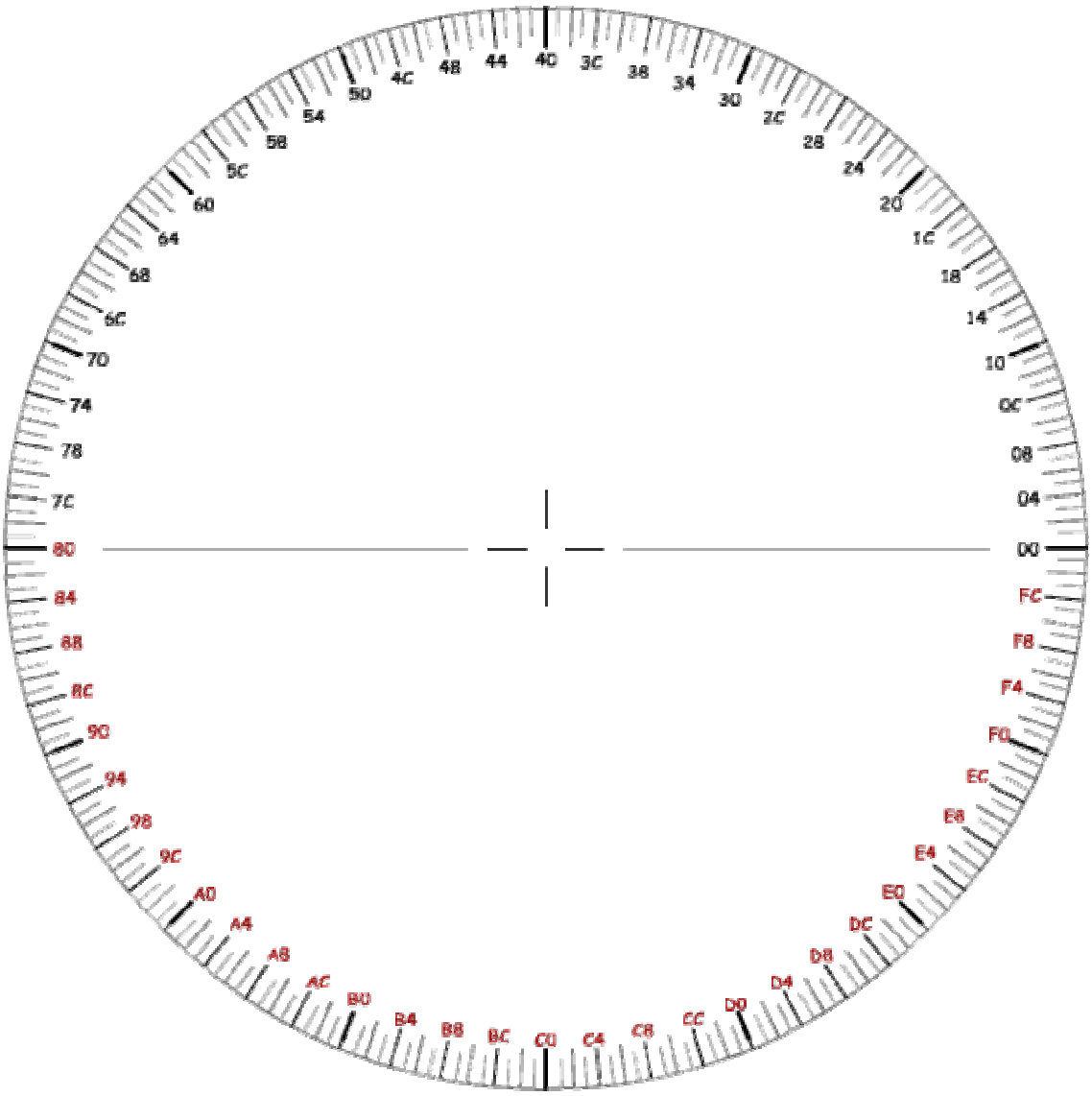
Les microprocesseurs indiqueront le dépassement de cette limite par un flag de **Carry** (report)

Le flag de Carry indique que le calcul donne un résultat dont la valeur dépasse la capacité des nombres non signés.

Il aurait fallu au moins 2 octets pour coder ces nombres : 00FA + 0010 = 010A

Les deux dernière pages de ce document permettent de construire la calculatrice en papier qui donnent les comme les CPU de nos ordinateurs permettent de calculer la somme ou la différence de 2 octets.


40
3C
38
34
30
2C
28
24
20
1C
18
14
10
0C
08
04
00
FC
F8
F4
F0
EC
E8
E4
E0
DC
D8
D4
D0
CC
C8
C4
C0
BC
B8
B4
B0
AC
A8
A4
A0
9C
98
94
90
8C
88
84
80
7C
78
74
70
6C
68
64
60
5C
58
54
50
4C
48
44


00
04
08
0C
10
14
18
1C
20
24
28
2C
30
34
38
3C
40
44
48
4C
50
54
58
5C
60
64
68
6C
70
74
78
7C
80
84
88
8C
90
94
98
9C
A0
A4
A8
AC
B0
B4
B8
BC
C0
C4
C8
CC
D0
D4
D8
DC
E0
E4
E8
EC
F0
F4
F8
FC